



UNIVERSITAS INDONESIA

**FORMULASI ELEMEN CANGKANG
TRIANGULAR DKMT18FS**

TESIS

Untuk diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Bidang Ilmu Teknik Sipil Program Studi Teknik Sipil

Disusun oleh :
Wati A. Pranoto
349 211 215 3

**PROGRAM PASCASARJANA BIDANG ILMU TEKNIK
PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL
APRIL - 1995**



UNIVERSITAS INDONESIA

**FORMULASI ELEMEN CANGKANG
TRIANGULAR DKMT18FS**

TESIS

Untuk diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Bidang Ilmu Teknik Sipil Program Studi Teknik Sipil

Disusun oleh :
Wati A. Pranoto
349 211 215 3

**PROGRAM PASCASARJANA BIDANG ILMU TEKNIK
PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL
APRIL - 1995**

PERNYATAAN KEASLIAN ISI TESIS

Yang bertandatangan di bawah ini :

N a m a : Wati Asriningsih Pranoto
No. Mahasiswa : 3492112153

Menyatakan bahwa tesis dengan judul :

FORMULASI ELEMEN CANGKANG TRIANGULAR DKMT18FS

Merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pekerjaan orang lain dan merupakan salinan atau hasil jiplakan dari tesis atau karya tulis orang lain.

Apabila dikemudian hari ternyata tidak sesuai dengan pernyataan di atas, penulis bersedia menerima segala sanksi yang akan dikenakan.

Jakarta, 23 April 1995



Wati Asriningsih Pranoto

LEMBAR PENGESAHAN

FORMULASI ELEMEN CANGKANG TRIANGULAR DKMT18FS

Disusun oleh : **Ir. Wati Asriningsih Pranoto**
Nomor Induk Mahasiswa : **3492112153**
Program Studi : **Teknik Sipil**

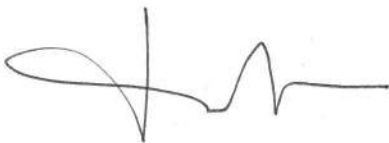
Disusun untuk melengkapi persyaratan kurikulum program Magister Bidang Ilmu Teknik Pascasarjana Universitas Indonesia guna memperoleh gelar Magister Teknik.

Tesis ini dapat disetujui untuk diajukan dalam sidang ujian tesis.

Jakarta, 23 April 1995

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I



Dr. Ir. Irwan Katili

Dosen Pembimbing II



Dr. Ir. Heru Purnomo

KATA PENGANTAR

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Teknik Bidang Ilmu Teknik Sipil Program Pascasarjana Fakultas Teknik Universitas Indonesia.

Penulis memilih judul ini dengan maksud untuk memformulasikan dan mengevaluasi elemen cangkang **DKMT18FS** serta menguji ketangguhan elemen tersebut sehingga dapat menjadi salah satu elemen alternatif dalam menganalisa struktur cangkang dengan menggunakan metode elemen hingga.

Diharapkan tesis ini dapat dipakai sebagai informasi yang bermanfaat untuk pengembangan elemen-elemen yang lebih baik lagi dalam menggunakan metode elemen hingga.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak **Dr. Ir. Irwan Katili**, sebagai pembimbing I.
2. Bapak **Dr. Ir. Heru Purnomo**, sebagai pembimbing II.
3. Bapak **Dr. Ir. Fx. Supartono**, sebagai Ketua Program Pascasarjana Bidang Ilmu Teknik Sipil Universitas Indonesia.
4. Bapak/Ibu Dosen Program Pascasarjana Bidang Ilmu Teknik Sipil, Universitas Indonesia.
5. Rekan-rekan mahasiswa program Pascasarjana Bidang Ilmu Teknik Sipil Struktur 1993/1994 yang telah banyak membantu secara moril sehingga tesis ini selesai.
6. Kurniawan, ST, yang telah membantu dalam tesis ini.
7. Pimpinan dan staf Fakultas Teknik Universitas Indonesia.
8. Pimpinan dan staf Fakultas Teknik Universitas Tarumanagara, khususnya Jurusan Sipil FT Untar yang telah memberi kesempatan tugas belajar dan membantu dalam penyelesaian tesis ini.

9. Ir. Sunarjo L. yang telah banyak membantu dalam penyelesaian tesis serta dorongan moril.

Akhirnya dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas perlindungan dan rahmatNya.

Jakarta, 23 April 1995

Wati A. Pranoto

DAFTAR ISI

	halaman
LEMBAR PENGESAHAN	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR NOTASI	vii
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xv
ABSTRAK	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang dan Permasalahan.	1
1.2 Tujuan dan Metodologi Penelitian.	3
1.3 Pembatasan Masalah	5
1.4 Sistematika Penulisan	5
BAB II TEORI PELAT	
2.1 Umum	6
2.2 Persamaan Umum Tiga Dimensi.	6
2.3 Hipotesa dan Teori Pada Pelat.	8
2.4 Teori Pelat Reissner-Mindlin.	8
2.4.1 Peralihan Virtuul.	9
2.4.2 Deformasi Virtuul.	11
2.5 Persamaan Keseimbangan.	14
2.6 Hubungan Gaya Resultan-Deformasi.	19
2.7 Prinsip Kerja Virtuul.	21
2.8 Energi Potensial Total.	22
2.8.1 Bentuk Umum.	22
2.8.2 Modifikasi Fungsional Persamaan Energi.	23

BAB III	FORMULASI ELEMEN DKMT	25
3.1	Umum.	25
3.2	Aproksimasi Fungsi Geometri.	26
3.3	Aproksimasi Fungsi Peralihan.	28
3.4	Vektor Kelengkungan.	29
3.5	Asumsi Vektor Deformasi Geser Transversal	30
3.6	Konstrain Diskrit Kirchhoff Mindlin.	35
3.7	Matrix Kekakuan Elemen DKMT.	37
BAB IV	FORMULASI ELEMEN ALLMAN	40
4.1	Umum..	40
4.2	Aproksimasi Fungsi Peralihan.	42
4.3	Vektor Deformasi Membran.	44
4.4	Matrix Kekakuan Elemen Allman.	45
BAB V	FORMULASI ELEMEN CANGKANG FASET TRIANGULAR DKMT18FS	47
5.1	Umum.	47
5.2	Matrix Kekakuan Elemen.	48
5.3	Koordinat Lokal dan Matrix Kosinus Arah.	50
5.4	Transformasi Koordinat Lokal Ke koordinat Global.	52
5.5	Tegangan dan Gaya Dalam Elemen.	54
5.6	Beban Nodal Ekiivalen.	56
BAB VI	UJI GERAKAN BENDA KAKU	58
6.1	Tujuan Pengujian	58
6.2	Pengujian Keabsahan Elemen	58
6.2.1	Uji Rang	58
6.2.2	Pergerakan Benda Kaku	59
6.2.2.1	Uji Pada Sebuah Elemen	59
6.2.2.2	Uji Pada Beberapa Elemen	61

BAB VII UJI KONVERGENSI	66
7.1 Uji Konvergensi.	66
7.2 Bentuk Setengah Bola (Spherical Domes).	69
7.3 Panel Silinder (Cylindrical Shell Roofs).	73
7.4 Pipa Silinder (Circular Cylindrical Shells).	78
7.5 Bentuk Parabol - Hiperbola (Paraboloid - Hyperboloid Shell)....	89
7.6. Bentuk Helicoidales atau Twisted Beam.	93
7.7 Bentuk Kantilever Z dengan sudut antara 90° .	97
7.8 Bentuk Kantilever Z dengan sudut antara 45° .	100
7.9 Bentuk Kantilever Kotak (Box Cantilever).	103
7.10 Bentuk Silinder Terbuka dengan Beban Momen Lentur (Slit- Cylinder Bending).	105
 BAB VIII KESIMPULAN DAN SARAN	 109
8.1 Kesimpulan	109
8.2 Saran	109
 DAFTAR PUSTAKA	 110

DAFTAR NOTASI

$\sim$	= tanda vektor (contoh : $\tilde{n}$)
$\wedge$	= perkalian silang (cross product)
$\cdot$	= perkalian titik (dot product)
$*$	= tanda virtuil
$\equiv$	= identik dengan
$\approx$	= kira-kira sama dengan
$\in$	= anggota dari
$\subset$	= bagian dari
$\cup$	= gabungan
Ω	= domain (daerah dari suatu variabel)
$\int$	= integral
$\{ \}$	= vektor kolom
$[]$	= matriks (juga di gunakan untuk menyatakan referensi)
$\langle \rangle = \{ \}^T$	= matrik baris (transpos dari matrik $\{ \}$)
$\forall$	= berlaku untuk setiap
δ	= simbol variasi
Σ	= penjumlahan
$\sqrt{}$	= akar dari
$[A]$	= matriks yang menghubungkan lendutan $\{u_n\}$ dengan $\{\alpha_n\}$
$[A]^{-1}$	= invers matriks $[A]$
$[A]^T$	= transpos dari matriks $[A]$
$[B_m]$	= matriks deformasi membran pada variabel nodal
$[B_b]$	= bending strain matriks, yaitu matriks yang menghubungkan $\{\chi\}$ dengan $\{ u_n \}$
$[B_s]$	= matriks deformasi geser pada variabel nodal.
B_s	= rotasi gaya dalam normal pada bidang S - Z
β_{xi}, β_{xj}	= rotasi dalam bidang X - Z pada nodal i dan j
β_{yi}, β_{yj}	= rotasi dalam bidang Y - Z pada nodal i dan j
$\beta_{x,x}^*$	= diferensiasi rotasi virtuil dalam bidang X - Z terhadap X

$\beta_{y,x}^*$	= diferensiasi rotasi virtual dalam bidang $Y-Z$ terhadap X
β_x, β_y	= rotasi dalam bidang $X-Z$ dan $Y-Z$
C^0	= formulasi dalam metode elemen hingga yang hanya membutuhkan kontinuitas pada fungsi peralihannya
C^1	= formulasi dalam metode elemen hingga yang hanya membutuhkan kontinuitas turunan pertama dari fungsi peralihannya
C_k	= cosinus arah sisi k
dx, dy, dz	= panjang diferensial arah sumbu X, Y, Z
D_m	= kekakuan membran
D_b	= kekakuan bending
D_s	= kekakuan geser
dA	= luas diferensial
$\Delta\beta_{sk}$	= variabel inkremental rotasi dalam bidang $z-s$ pada nodal k tengah sisi elemen.
e	= elemen (contoh : A^e = luas elemen)
ϵ_z	= regangan normal pada arah sumbu z
ϵ_x	= regangan normal arah sumbu x
ϵ_y	= regangan normal arah sumbu y
$\underline{\epsilon}$	= deformasi yang boleh didefinisikan secara bebas
$\langle e_x^* e_y^* e_{xy}^* \rangle$	= deformasi membran virtual pada pelat pada bidang $x-y$
E	= modulus Young
ξ, η	= sistem koordinat natural
f_z	= beban merata arah vertikal
F_z	= beban vertikal persatuan panjang pada S_f
ϕ_k	= faktor besarnya pengaruh deformasi geser lintang
f_x	= beban merata arah sumbu x
f_y	= beban merata arah sumbu y
f_z	= beban merata arah sumbu z
f_s, m_s	= gaya persatuan panjang yang bekerja pada S_f
f, m	= gaya persatuan luas pada permukaan tengah
F_z	= beban vertikal persatuan panjang pada S_f
γ_{xy}	= regangan geser pada bidang $x-y$

γ_{xz}	= regangan geser transversal pada bidang x-z
γ_{yz}	= regangan geser transversal pada bidang y-z
$\{\underline{\gamma}\}$	= regangan geser transversal yang dapat didefinisikan secara bebas
$\underline{\gamma}_{sk}$	= regangan geser independen dalam bidang s-z pada sisi k
$\underline{\gamma}_{s4}$	= regangan geser independen dalam bidang s-z pada sisi 7
$\underline{\gamma}_{s5}$	= regangan geser independen dalam bidang s-z pada sisi 5
$\underline{\gamma}_{s6}$	= regangan geser independen dalam bidang s-z pada sisi 6
γ_{xy}	= regangan geser pada bidang X-Y
G	= modulus geser
h	= dimensi ketebalan pelat
$[H_m]$	= matriks elastik membran
$[H_b]$	= matriks bahan yang menghubungkan antara momen bending dengan kurvatur (matriks elastik lentur)
$[H_s]$	= matriks bahan yang menghubungkan antara gaya geser transversal dengan deformasi geser (matriks elastik geser)
$[J]$	= matriks Jacobian
$ J $	= determinan matriks Jacobian
$[J]^{-1}$	= matriks Jacobian inverse
k	= koefisien koreksi geser
χ^*	= kelengkungan virtuil
$\underline{\chi}$	= kelengkungan yang boleh didefinisikan secara bebas
χ_x^*	= kelengkungan virtuil dalam bidang X-Z
$[K]$	= matriks kekakuan struktur global
$[k_m]$	= matriks kekakuan membran elemen
$[K_b]$	= matriks kekakuan elemen akibat bending
$[K_s]$	= matriks kekakuan elemen akibat shear
L	= dimensi panjang pelat
L_x, L_y	= dimensi panjang searah sumbu X dan Y
$M_{x,x}$	= diferensiasi momen M_x terhadap X
$M_{y,y}$	= diferensiasi momen M_y terhadap Y

$M_{xy,x}, M_{xy,y}$	= diferensiasi momen M_{xy} terhadap X dan Y
M_x, M_y	= gaya dalam momen bending yang bekerja dalam bidang $X-Z$ dan $Y-Z$
M_{xy}	= gaya dalam momen torsi
M_n	= momen bending yang bekerja dalam bidang $N-Z$ (pada gambar 2.8)
M_s	= momen bending yang bekerja pada sisi (sisi 4,5,6)
M_{ns}	= momen bending yang bekerja pada arah normal dari sisi (sisi 4,5,6)
M_{ns}	= momen torsi yang bekerja dalam bidang $S-Z$ (pada gambar 2.8)
m_x	= momen bending, yang bekerja pada bidang $X-Z$, persatuan panjang pada S_f
m_y	= momen bending, yang bekerja pada bidang $Y-Z$, persatuan panjang pada S_f
$N_{i,\xi}, N_{i,\eta}$	= diferensiasi fungsi bentuk terhadap kordinat natural ξ dan η
N_i	= fungsi bentuk koordinat natural pada titik diskrit
$N_1, \dots, N_3$	= fungsi bentuk pada titik diskrit elemen
$N_{i,x}$	= diferensiasi fungsi bentuk terhadap koordinat global X dan Y
Π	= energi potensial total
Π_b, Π_s	= energi potensial regangan bending dan geser
Π_{ext}	= energi potensial beban eksternal
σ_x, σ_y	= tegangan normal arah sumbu X dan Y akibat bending
σ_z	= tegangan normal arah sumbu Z
R	= jari-jari lingkaran
S_f	= bagian tepi pelat yang dikenai gaya/beban merata persatuan panjang
S_k	= sinus arah sisi k
T_n	= gaya lintang yang bekerja pada bidang $N-Z$ (pada gambar 2.8)
T_x, T_y	= gaya lintang yang bekerja pada bidang $Y-Z$ dan $X-Z$
$T_{x,x}$	= diferensiasi gaya geser T_x terhadap X
$T_{y,y}$	= diferensiasi gaya geser T_y terhadap Y
θ_x	= vektor rotasi dalam arah x
θ_y	= vektor rotasi dalam arah y
θ_z	= vektor rotasi dalam arah z
u_p^*	= translasi virtuil titik p pada arah sumbu X

u_n	= variabel nodal untuk sebuah elemen
ν	= rasio Poisson
v_p^*	= translasi virtual titik p pada arah sumbu Y
ω	= faktor pemberat pada integrasi Gauss
w	= translasi arah vertikal (sumbu Z)
w_q^*	= translasi vertikal virtual titik q
w_i, w_j	= translasi vertikal pada nodal i dan j
$w_{,x}^*$	= diferensiasi w^* terhadap X
$w_{,xx}^*$	= diferensiasi kedua w^* terhadap X
$w_{,yy}^*$	= diferensiasi kedua w_y virtual terhadap Y
W	= kerja virtual pada pelat
W_{int}	= kerja dalam virtual akibat gaya dalam
W_{ext}	= kerja luar virtual akibat beban luar
W_{int}^b	= kerja dalam virtual akibat momen bending
W_{int}^s	= kerja dalam virtual akibat geser/shear
ω_i	= faktor pemberat pada integrasi numerik di titik i
x	= fungsi geometri titik-titik terhadap sumbu X
x_i	= absis dari koordinat global titik diskrit i
$x_{,\xi}, x_{,\eta}$	= diferensiasi fungsi geometri x terhadap koordinat natural ξ dan η
y	= fungsi geometri titik-titik terhadap sumbu Y
y_i	= ordinat dari koordinat global titik diskrit i
$y_{,\xi}$	= diferensiasi fungsi geometri y terhadap koordinat natural ξ
$y_{,\eta}$	= diferensiasi fungsi geometri y terhadap koordinat natural η
z	= koordinat titik dalam arah sumbu Z
DKMT	= Discrete Kirchhoff Mindlin Triangle
DKT	= Discrete Kirchhoff Triangle
DST-BL	= Discrete Shear Triangle - Batoz Lardeur
DST-BK	= Discrete Shear Triangle - Batoz Katili
FS	= Facetted Shell
CST	= Constant Strain Triangle
GT	= Geser Transversal

DAFTAR GAMBAR

	halaman
Gambar 1.1. Elemen Cangkang DKMT18FS	3
Gambar 2.1. Deskripsi geometri pelat.	6
Gambar 2.2. Tegangan positif pada elemen struktur solid 3D	7
Gambar 2.3. Rotasi pelat.	9
Gambar 2.4. Peralihan pelat dengan deformasi geser pada bidang x-z.	10
Gambar 2.5. Gerakan virtuil.	10
Gambar 2.6. Peralihan pelat tanpa deformasi geser pada bidang x-z.	13
Gambar 2.7. Peralihan virtuil pelat tanpa memperhitungkan pengaruh deformasi geser.	13
Gambar 2.8. Resultan tegangan pada elemen diferensial pelat.	15
Gambar 2.9. Arah momen positif.	16
Gambar 2.10. Tegangan yang bekerja pada elemen pelat homogen.	17
Gambar 3.1. Elemen pelat bending DKMT (<i>Discrete Kirchhoff Mindlin Triangular</i>).	25
Gambar 3.2. Elemen dalam sistem koordinat kartesian (x-y), koordinat normal kartesian (n-s) dan koordinat natural ($\xi - \eta$).	26
Gambar 3.3. Data kinematis variabel nodal sudut dan variabel nodal sisi tengah elemen.	28
Gambar 3.4. Data kinematis dan deformasi geser lintang tangensial pada nodal 4,5,6.	31
Gambar 3.5. Variasi β_n dan β_s sepanjang sisi elemen	31
Gambar 4.1. Elemen membran triangular Allman.	41
Gambar 4.2. Data kinematis - derajat kebebasan inisial.	42
Gambar 4.3. Sistim koordinat kartesian dan normal tangensial pada sisi elemen.	42
Gambar 4.4. Peralihan pada sisi elemen.	43
Gambar 5.1. Cangkang dimodelisasi dengan sekumpulan elemen cangkang faset.	48

Gambar 5.2.	Elemen tipe cangkang faset.	49
Gambar 5.3.	Reper lokal x, y, z .	50
Gambar 5.4.	Distribusi tegangan geser sepanjang ketebalan pelat pada bidang $y-z$.	55
Gambar 6.1.	Uji pada sebuah elemen.	60
Gambar 6.2.	Uji pada beberapa elemen.	62
Gambar 7.1.	Bentuk Setengah Bola (Spherical Domes).	69
Gambar 7.2.	Konvergensi Lendutan U_A - Bentuk Setengah Bola.	71
Gambar 7.3.	Deformasi - Bentuk Setengah Bola.	72
Gambar 7.4.	Panel Silinder (Cylindrical Shell Roofs).	73
Gambar 7.5a.	Konvergensi Lendutan W_B - Panel Silinder.	75
Gambar 7.5b.	Konvergensi Lendutan W_C - Panel Silinder.	76
Gambar 7.6.	Lendutan sepanjang sisi DA dan CB ($N=12$).	77
Gambar 7.7.	Pipa Silinder (Circular Cylindrical Shells).	78
Gambar 7.8a.	Konvergensi Lendutan W_C - Pipa Silinder ($R/h=100$).	80
Gambar 7.8b.	Konvergensi Lendutan V_D - Pipa Silinder ($R/h=100$).	81
Gambar 7.9a.	Konvergensi Lendutan W_C - Pipa Silinder ($R/h=10$).	82
Gambar 7.9b.	Konvergensi Lendutan U_B - Pipa Silinder ($R/h=10$).	83
Gambar 7.10.	Deformasi Global (Mesh 12×12).	84
Gambar 7.11.	Lendutan sepanjang DC, BC dan AD ($R/h=100$).	85
Gambar 7.12.	Gaya dalam resultan sepanjang DC ($R/h=100$).	86
Gambar 7.13.	Gaya dalam resultan sepanjang BC ($R/h=100$).	87
Gambar 7.14.	Gaya dalam resultan sepanjang AD ($R/h=100$).	88
Gambar 7.15.	Bentuk Parabol-Hiperbola (Paraboloid-Hyperboloid Shells).	89
Gambar 7.16.	Konvergensi lendutan W_o - Bentuk Parabol-Hiperbola.	91
Gambar 7.17.	Lendutan normal sepanjang OB dan OE - Bentuk Parabol-Hiperbola.	92
Gambar 7.18.	Bentuk Helicoidales atau Twisted Beam.	93
Gambar 7.19a.	Konvergensi untuk $h=0.32$; $P_x=1000, P_z=0$.	95
Gambar 7.19b.	Konvergensi untuk $h=0.32$; $P_x=0, P_z=1000$.	96
Gambar 7.20.	Bentuk Kantilever Z dengan sudut antara 90° .	97

Gambar 7.21. Konvergensi tegangan arah X pada titik	
A - Bentuk kantilever Z, 90° .	98
Gambar 7.22. Konvergensi tegangan arah X pada titik	
B - Bentuk kantilever Z, 90° .	99
Gambar 7.23. Bentuk kantilever Z, 45° .	100
Gambar 7.24. Konvergensi untuk Bentuk kantilever Z, 45° .	101
Gambar 7.25a. Bentuk kantilever kotak (Box Cantilever), mesh 8x3.	103
Gambar 7.25b. Bentuk kantilever kotak (Box Cantilever), mesh 8x6.	104
Gambar 7.26. Bentuk silinder terbuka dengan beban momen lentur	
(Slit Cylinder Bending).	105
Gambar 7.27. Konvergensi V dan θ - Mesh Diagonal Searah.	107
Gambar 7.28. Konvergensi V dan θ - Mesh Diagonal Menyilang.	108

DAFTAR TABEL

	halaman
Tabel I. Fungsi bentuk.	29
Tabel II. Nilai i , k dan m untuk persamaan (3.31-33).	33
Tabel III. Nilai i , j dan k untuk persamaan (3.47-48).	36
Tabel IV. Integrasi numerik formula Hammer untuk triangular.	36
Tabel 6.1 Hasil Numerik Uji pada Sebuah Elemen.	60
Tabel 6.2 Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Pertama.	63
Tabel 6.3 Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Ke Dua.	64
Tabel 6.4 Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Ke Tiga.	65
Tabel 7.1 Lendutan - Bentuk Setengah Bola.	71
Tabel 7.2a Lendutan W_B - Panel Silinder.	75
Tabel 7.2b Lendutan W_C - Panel Silinder.	76
Tabel 7.3a Lendutan W_C - Pipa Silinder ($R/h = 100$).	80
Tabel 7.3b Lendutan V_D - Pipa Silinder ($R/h = 100$).	81
Tabel 7.4a Lendutan W_C - Pipa Silinder ($R/h = 10$).	82
Tabel 7.4b Lendutan U_B - Pipa Silinder ($R/h = 10$).	83
Tabel 7.5 Lendutan W_O - Bentuk Parabol-Hiperbola.	91
Tabel 7.6 Lendutan - Bentuk Helicoidales ($h = 0.0032$).	95
Tabel 7.7 Lendutan - Bentuk Helicoidales ($h = 0.32$).	96
Tabel 7.8 Tegangan arah X pada titik A dan B - Bentuk Kantilever Z , 90°	99
Tabel 7.9 Lendutan dan Tegangan - Bentuk Kantilever Z , 45°	102
Tabel 7.10 Mesh 8×3 dan 8×6 - Bentuk Kantilever Kotak.	104
Tabel 7.11 Konvergensi - Mesh Diagonal Searah, Bentuk Silinder Terbuka.	107
Tabel 7.12 Konvergensi - Mesh Diagonal Menyilang, Bentuk Silinder Terbuka.	108

**FORMULASI ELEMEN CANGKANG
TRIANGULAR DKMT18FS**

xvi + 114 halaman

Dalam tesis ini, akan dibahas tentang formulasi dan evaluasi elemen cangkang triangular DKMT18FS dengan pendekatan faceted shell (bidang datar). Pendekatan bidang datar digunakan dalam mendiskritisasi struktur cangkang yakni dengan mengkombinasikan elemen membran dan elemen pelat, dimana elemen membran yang digunakan adalah elemen membran ALLMAN dan elemen pelat yang digunakan adalah elemen pelat DKMT yang dikembangkan oleh Katili pada analisa pelat bending dengan Metode Elemen Hingga.

Elemen DKMT ini dikembangkan berdasarkan teori pelat Reissner-Mindlin, selain memperhitungkan efek lentur pada pelat tersebut, juga memperhitungkan deformasi geser transversal yang terjadi, sehingga apabila setelah dikombinasikan dengan elemen membran ALLMAN maka akan didapat suatu elemen cangkang yang dapat diterapkan baik untuk struktur cangkang tipis maupun pada struktur cangkang tebal.

Dari evaluasi yang dilakukan dapat ditarik kesimpulan bahwa elemen ini dapat digunakan untuk kasus tipis dan tebal, lulus uji Gerakan Benda Kaku untuk gabungan elemen yang datar, tidak memiliki Spurious Mode, tidak ada Shear Locking dan Membrane Locking untuk kasus tipis, memenuhi semua kriteria uji konvergensi.

Referensi : 50 (1943 - 1993)

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG DAN PERMASALAHAN

Struktur cangkang (shell) sering dijumpai dilingkungan sekitar kita , misalnya ; cerobong, kubah, tangki, gedung pencakar langit, karoseri mobil, instalasi nuklir, kapal laut, rudal, struktur pesawat kedirgantaraan dll. Konsepsi dan analisa struktur tersebut adalah aktivitas penting dalam perencanaan teknik dan segi ekonomisnya.

Masalah keamanan adalah hal yang tidak bisa diabaikan dalam merealisasikan pusat instalasi nuklir, struktur kedirgantaraan dan kapal laut. Penentuan yang akurat dan optimal terhadap faktor keamanan hanya dapat diperoleh dengan pengetahuan yang unggul tentang perilaku struktur.

Karena bentuk dan tipe pembebanan yang beragam, metode konvensional tidak lagi dapat diandalkan untuk mengetahui perilaku struktur tersebut secara akurat. Penemuan dan pengembangan analisa numerik (numerical analysis) yaitu *Finite Element Method (F.E.M)* sejak tiga dasa warsa ini terus berlangsung karena metode ini merupakan metode yang paling fleksibel bagi pemecahan problema dalam industri di negara-negara maju. Berbagai persoalan besar, kini dapat diselesaikan dengan FEM. Semua ini menjadi mungkin karena dukungan fasilitas komputer yang bertumbuh secara sangat revolusioner dalam kemampuan dan kecepatannya.

Saat ini penelitian dalam rangka menemukan elemen-elemen baru masih terus berlanjut, baik yang memperhitungkan deformasi geser lintang (berdasarkan teori *Reissner-Mindlin* [Ref. M1, R1]) maupun yang mengabaikannya (berdasarkan teori *Kirchhoff-Love* [Ref.K1, L1]). Setiap elemen yang diajukan oleh setiap developer selalu berusaha untuk menampilkan keunggulannya dibandingkan dengan pendahulunya. Sedangkan para peneliti dan pemakai (pihak industri) umumnya lebih menyukai elemen yang simpel, andal dan memperhitungkan deformasi geser tanpa menimbulkan problema numerik yaitu *Shear Locking dan Spurious Modes*.

Sudah banyak elemen cangkang dikembangkan dan dimodelisasi dengan menggunakan elemen cangkang faset. Elemen cangkang faset sudah biasa digunakan untuk memodelisasi cangkang dengan melakukan superposisi elemen membran dan elemen bending. Didalam beberapa literatur dapat ditemukan beberapa formulasi untuk memodelisasi cangkang [Ref. Z1, bab 3]. Penggunaan elemen cangkang faset untuk menyelesaikan masalah-masalah cangkang statik dan phenomena phisik lainnya sudah demikian populer, terutama untuk penyelesaian masalah-masalah praktis dalam industri. Dalam formulasi elemen cangkang, beberapa hal yang perlu dihindari adalah ;

- Pola nodal yang rumit dengan jumlah derajat kebebasan (d.k.) per nodal bervariasi, sehingga menyulitkan dalam pemberian kondisi batas.
- Formulasi 5 d.k. per nodal harus diubah menjadi 6 d.k. per nodal bila terdapat tekukan pada struktur yang hendak dianalisa.
- *Membran locking*, khususnya pada titik yang dibebankan di cangkang hemispherical.
- Kekurangan rank pada kekakuan elemen yang dapat menghasilkan *spurious modes*.

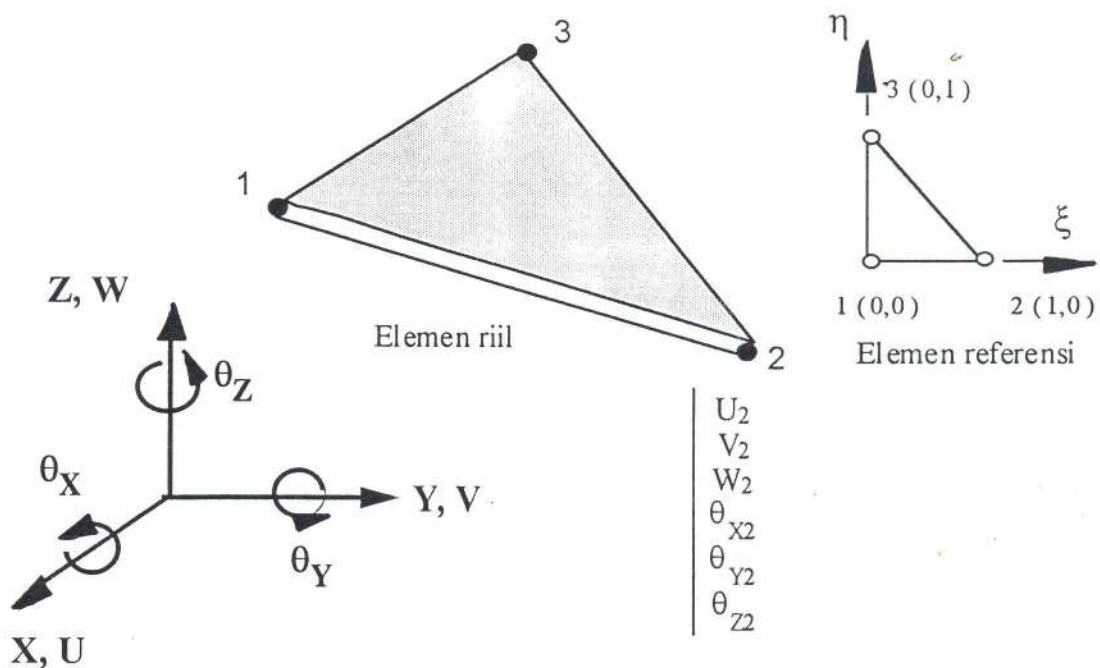
Elemen cangkang faset triangular dengan 18 derajat kebebasan (d.k.) adalah salah satu elemen paling simpel dalam analisa cangkang berbentuk sembarang. Elemen tersebut sangat dibutuhkan baik untuk penelitian maupun untuk aplikasi teknik. Model ini merupakan penggabungan elemen bending dan elemen membran. Beberapa elemen bending ada yang baik, dan untuk elemen membran biasanya digunakan elemen CST (Constant Strain Triangle). Tetapi elemen CST menurunkan hasil keseluruhan elemen cangkang akibat dari konvergensinya yang sangat rendah.

Konsep dari penggunaan elemen faset plan dalam analisa cangkang diusulkan tahun 1961 oleh Greene et al [G1] dan sudah menjadi ciri utama pada hampir semua finite elemen codes yang populer, seperti ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARK, NASTRAN , GT-STRU DL, SAP90 dll.

1.2 TUJUAN DAN METODOLOGI PENELITIAN.

Yang penting dalam memformulasikan suatu elemen cangkang faset, adalah keseimbangan aproksimasi aksi membran dan bending serta aproksimasi geometri tercapai dengan baik.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memformulasi dan mengevaluasi performa elemen DKMT18FS (Discrete Kirchhoff Mindlin Triangle 18 d.o.f. Faceted Shell) yang merupakan gabungan dari 2 elemen dasar : elemen bending dan elemen membran. Masing-masing nodal mempunyai 6 d.o.f. yaitu 3 translasi dan 3 rotasi (gbr.1).



Gbr1.1. Elemen cangkang DKMT18FS

Untuk elemen bending digunakan elemen DKMT [Ref. K2] dengan 9 d.o.f. total, dimana elemen ini diformulasikan berdasarkan pada Teknik Discrete Kirchhoff Mindlin dan Teori Pelat Mindlin-Reissner dengan memasukkan efek geser transversal (GT). Telah dibuktikan bahwa elemen ini sangat kokoh dan mempunyai kecepatan konvergensi yang lebih baik dibanding dengan elemen sejenis yang ada. Elemen ini mempunyai karakteristik sebagai berikut :

- Lulus Patch Test untuk pelat tipis dan tebal secara memuaskan ;
- Tidak mengandung extra Zero Energy Modes ;

- Tidak terjadi shear locking untuk kasus pelat tipis ;
- Relatif tidak sensitif terhadap distorsi geometri ;
- Geometrically invariant ;
- Karakteristik dari konvergensi mesh sangat baik ;
- Kompatibilitas elemen selalu memuaskan, baik untuk kasus pelat tipis maupun tebal ;
- Waktu komputasi yang efisien.

Sedangkan elemen membran yang dipakai adalah elemen Allman [Ref. A1]. Elemen Allman sudah diketahui secara umum lebih unggul dari elemen CST (Constant Strain Triangle) dalam aplikasi plane stress. Allman telah memformulasikan elemen plane stress 3 nodal dengan 9 d.o.f. dengan penggabungan d.o.f. rotasi (the drilling degree of freedom). Allman menggunakan integrasi penuh, tetapi diamati oleh Carpenter et al [C1] bahwa integrasi penuh membuat elemen sangat kaku pada hemispherical test. Oleh karena itu, pola sebuah titik integrasi telah dilakukan. Hasilnya adalah pengurangan rank elemen. Spurious singular modes muncul hanya dalam keadaan luar biasa, tetapi kemungkinannya tetap tidak diinginkan. MacNeal dan Harder [M2] dapat mengatasi masalah spurious modes ini dengan teknik stabilisasi.

Ciri-ciri utama yang menarik dari pemodelan elemen cangkang faset triangular adalah :

- Sempel untuk diformulasikan ;
- Mudah untuk memasukan data geometrinya ;
- Mudah untuk menggabungkannya dengan elemen lain ;
- Dapat dengan baik merepresentasikan rigid body motion dengan deformasi nol ;
- Waktu komputasi penggunaan elemen yang relatif banyak memberikan keuntungan dalam hal kecepatannya.

Dari formulasi ini diharapkan akan diperoleh suatu elemen cangkang faset yang simpel, akurat dan efisien. Evaluasi elemen akan meliputi Uji Gerak Benda Kaku, Spurious Modes dan Uji Benchmark.

1.3 PEMBATASAN MASALAH.

Penelitian ini dibatasi dengan :

1. Hanya untuk elemen cangkang DKMT18FS yang merupakan gabungan elemen DKMT dan elemen Allman.
2. Dengan material homogen, isotropik, linier, elastik dan tipe pembebanan statik.

1.4 SISTIMATIKA PENULISAN.

Penulisan ini akan dimulai dari pembahasan teori pelat yang meliputi efek membran dan bending. Teori ini lebih dikenal dengan nama teori pelat Reissner-Mindlin Hal-hal mengenai hipotesa dan penjabaran perumusan diberikan secara mendetail pada Bab II.

Kemudian pada Bab III akan dibahas formulasi elemen bending triangular DKMT. Penggunaan modifikasi fungsional Hu-Washizu dan teknik Discrete Kirchhoff Mindlin dijelaskan dalam upaya mendapat elemen bending yang andal dan bebas dari problem numerik.

Setelah itu pada Bab IV akan dibahas formulasi elemen membran triangular Allman, yaitu elemen membran dengan rotasi drilling. Dijelaskan pula penggunaan satu titik integrasi Hammer agar diperoleh elemen yang sederhana dan efisien. Masalah spurious modes yang muncul kemudian diatasi dengan cara yang sederhana.

Pada Bab V dijelaskan cara penggabungan 2 elemen tersebut, agar diperoleh matrix kekakuan global dengan cara transformasi. Proses perhitungan gaya dalam dan tegangan pada level elementer diuraikan dengan sangat jelas.

Pada Bab VI, elemen DKMT18FS akan diuji terhadap gerakan benda kaku.

Pada Bab VII elemen DKMT18FS akan diuji dengan Uji Benchmark, yang sekaligus merupakan contoh perhitungan.

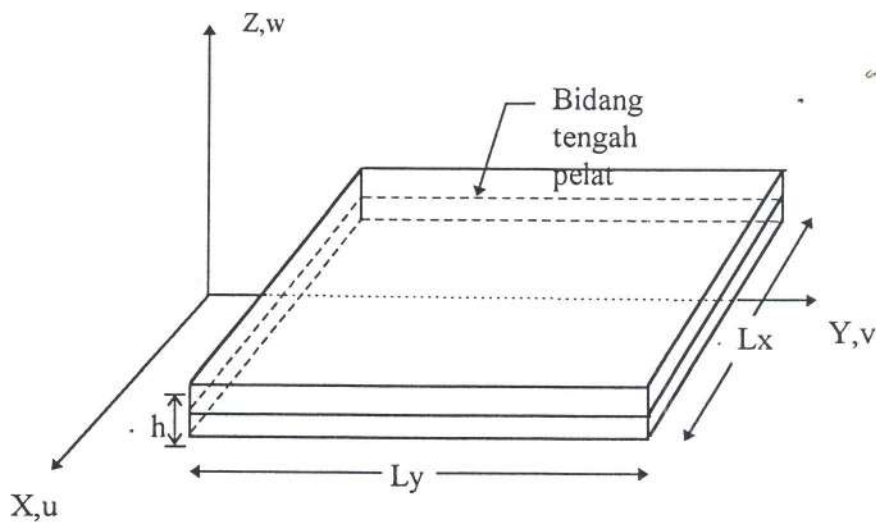
Pada Bab terakhir yaitu Bab VIII, merupakan kesimpulan dan beberapa saran disampaikan dalam penggunaan elemen DKMT18FS ini.

BAB II

TEORI PELAT

2.1 UMUM

Pelat adalah suatu struktur solid 3 dimensi yang didefinisikan oleh bidang tengahnya, dengan ketebalan h (arah- z), yang lebih kecil dibandingkan dimensi lainnya, panjang dan lebar pelat (dalam arah- x dan arah- y).

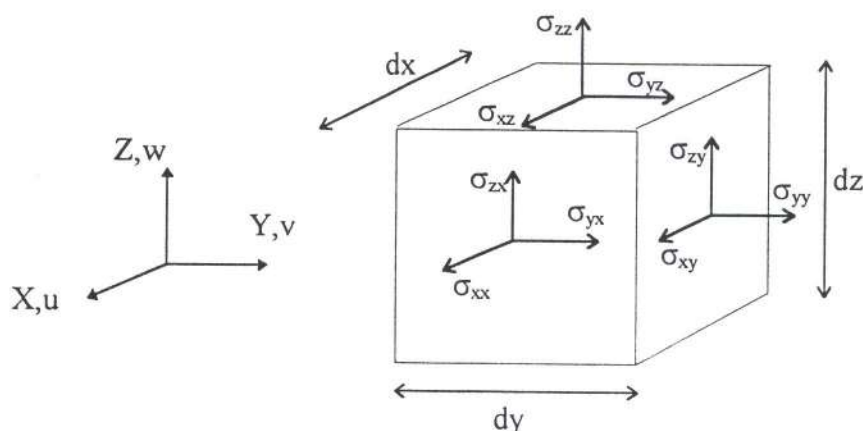


Gbr. 2.1 Deskripsi geometri pelat

Dari pernyataan di atas, maka dapat dikatakan bahwa pelat sebagai struktur solid 3 dimensi (3D) dapat dideskripsikan dalam bentuk 2 dimensi, dengan demikian rumusan analisa struktur solid 3D dapat diterapkan pada struktur pelat, namun diperlukan beberapa asumsi dalam rumusannya. Dengan demikian, beberapa hipotesa diterapkan dalam perumusan teori pelat.

2.2 PERSAMAAN UMUM TIGA DIMENSI

Struktur solid 3 dimensi dengan bahan yang elastis-linier dan isotropis-homogen memiliki tegangan-tegangan dalam, seperti digambarkan pada elemen dari suatu struktur solid 3 dimensi di bawah ini (gambar 2.2) :



Gbr. 2.2 Tegangan positif pada elemen struktur solid 3D

Dalam hal ini, elemen diferensial di atas berukuran $(dx)(dy)(dz)$ mempunyai 6 komponen vektor tegangan yang independen, dimana terdapat tiga tegangan normal (σ_x , σ_y , σ_z), dan tiga tegangan geser (σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}). Sedangkan untuk tegangan geser dikarenakan prinsip keseimbangan, maka kondisi dibawah ini harus dipenuhi :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \text{ dan } \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (2.1)$$

Berdasarkan hukum Hooke, hubungan antara tegangan dan regangan untuk material elastis-linier dan isotrop-homogen dapat dinyatakan oleh persamaan berikut ini :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

dimana : E adalah modulus Young, ν adalah rasio Poisson dan.

$$G \text{ adalah modulus geser : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Dari persamaan 2.2, tampak bahwa benda solid 3 dimensi mengalami deformasi regangan ke 3 arah (dalam sistem koordinat Kartesian : arah x, y dan z), yaitu tiga deformasi normal (ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z), dan tiga deformasi geser (γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz}).

σ_{xy} , σ_{xz} dan σ_{yz} seringkali dinyatakan dalam τ_{xy} , τ_{xz} dan τ_{yz} .

2.3 HIPOTESA DAN TEORI PADA PELAT

Beberapa hipotesa, sebagai asumsi-asumsi dasar dalam dasar perumusan teori pelat adalah :

1. Domain Ω dinyatakan dalam bentuk :

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-h/2, h/2], (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2\}$$

h = tebal pelat

A = luas bidang tengah pelat

2. $\sigma_{zz} = 0$

3. $w_q^* = (x,y,z) = w_p^* (x,y)$

q = titik pada sembarang penampang pelat.

p = titik pada bidang tengah pelat.

Penjelasan singkat untuk ketiga hipotesa di atas adalah sebagai berikut :

1. Pada asumsi ke-1, ketebalan pelat (h) dapat dinyatakan dalam fungsi x dan y .
2. Asumsi ke-2 merupakan hipotesa plane stress, tegangan normal σ_z diabaikan.
3. Asumsi ke-3 menyatakan bahwa tidak terjadi perubahan ketebalan pelat.

Di samping ketiga asumsi dasar di atas, ada asumsi lain yang berkenaan dengan masalah ketebalan pelat, khususnya dalam analisa peranan deformasi geser transversal (GT) pada pelat. Ukuran ketebalan struktur pelat tidak hanya menentukan klasifikasi geometrisnya saja, namun juga terhadap klasifikasi analisa struktur, yaitu dalam hal peranan pengaruh GT (Geser Transversal). Ada 2 macam teori yang menjadi dasar dalam klasifikasi analisa struktur pelat, yaitu :

1. Teori pelat Kirchhoff-Love berlaku pada pelat tipis ($L/h > 20$), dimana deformasi GT dapat diabaikan.
2. Teori pelat Reissner-Mindlin berlaku pada pelat tebal ($4 < L/h < 20$), di mana deformasi GT perlu diperhitungkan.

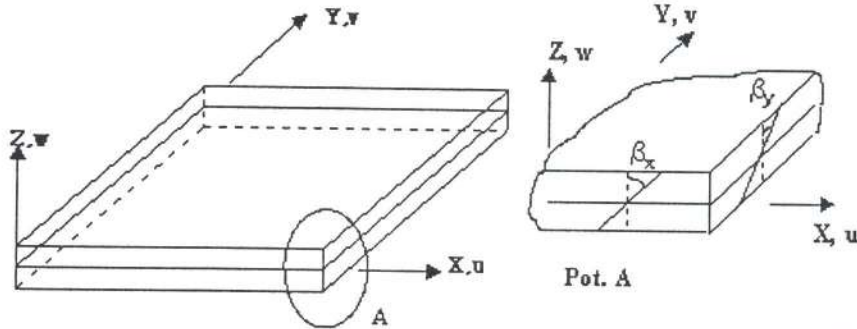
L adalah dimensi pelat pada bidang x - y sedangkan h adalah tebal pelat (gambar 2.1).

2.4 TEORI PELAT REISSNER-MINDLIN

Pada teori Reissner-Mindlin peranan pengaruh deformasi GT diperhitungkan, disamping itu hanya diperlukan kontinuitas C^0 , artinya hanya dibutuhkan kontinuitas peralihan di antara elemen-elemen yang berbatasan sedangkan diferensiasi primernya

tidak diharuskan kontinu, dengan demikian aproksimasi persamaan peralihan (dalam hal ini peralihan vertikal w serta rotasi β_x dan β_y) dapat diekspresikan secara independen.

2.4.1 Peralihan Virtuail

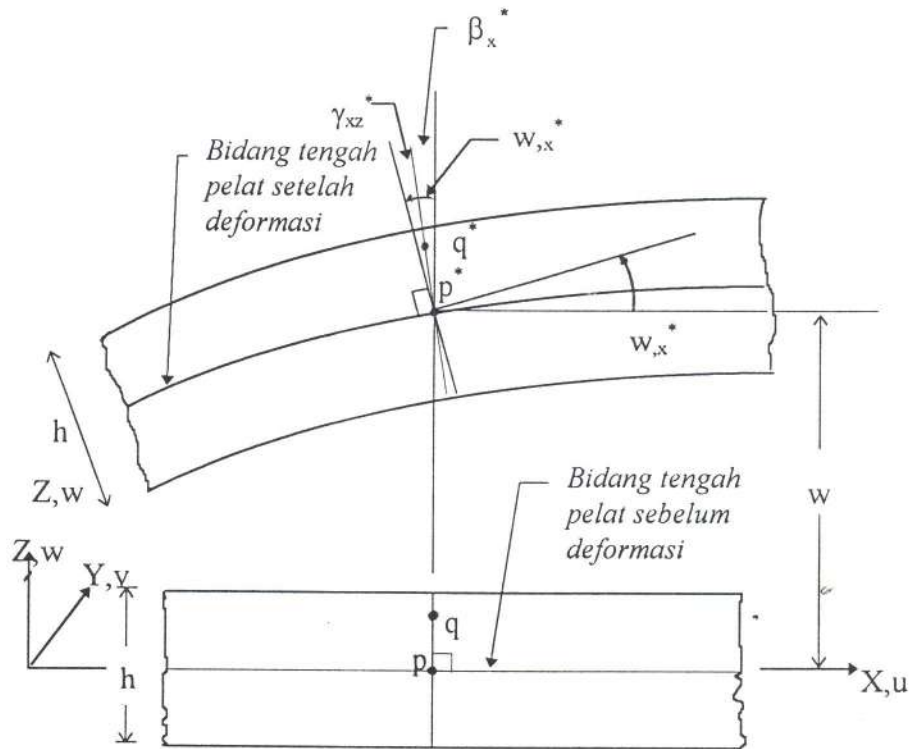


Gbr. 2.3 Rotasi pelat

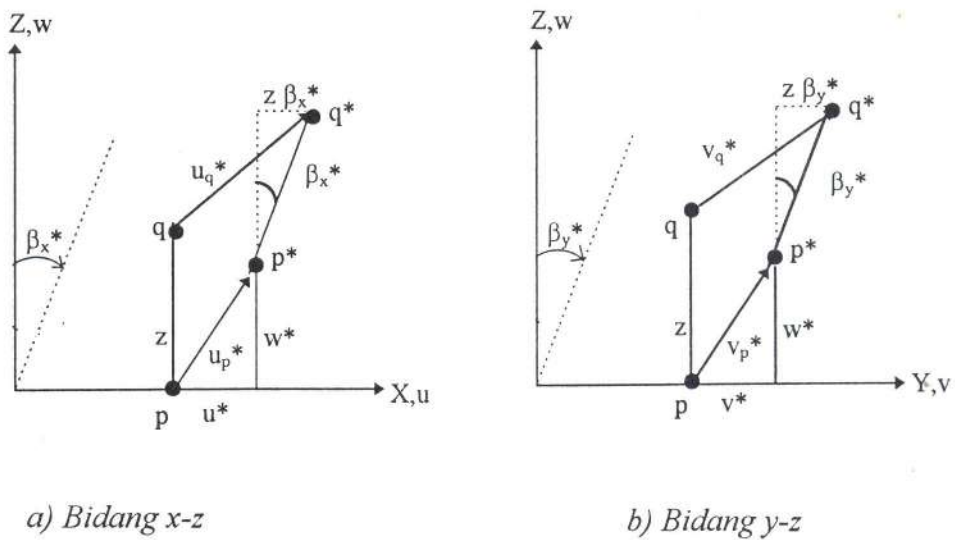
Gambar 2.3 memperlihatkan pelat yang belum dibebani. Bidang tengah pelat sebagai bidang x - y . Komponen peralihan arah x , y dan z dilambangkan dalam u , v dan w . Fungsi peralihan komponen u dan v merupakan fungsi linier dalam arah z dikalikan dengan rotasi antara bidang tengahnya terhadap bidang x - z dan y - z , yang dinotasikan dalam β_x dan β_y . Pada elemen-elemen yang peralihannya memperhitungkan deformasi geser, persamaan peralihannya untuk sembarang titik dalam suatu irisan penampang pelat didefinisikan berdasarkan hipotesa dari teori pelat Reissner-Mindlin. Adapun hipotesa dari teori pelat Reissner-Mindlin menyatakan bahwa :

“ Titik-titik material, yang sebelum deformasi terletak pada garis lurus terhadap permukaan tengah, setelah deformasi akan tetap berada pada garis lurus, tetapi tidak harus tetap tegak lurus pada permukaan tengah”.

Kinematika pelat berdasarkan teori Reissner-Mindlin tersebut, dapat dilihat pada gambar 2.4 dan 2.5 berikut ini.



Gbr. 2.4 Peralihan virtual pelat dengan deformasi geser
(γ_{xz}^*) pada bidang x-z



Gbr.2.5 Gerakan virtual titik p dan q

Hipotesa penampang lurus ini mengekspresikan peralihan virtuil sembarang titik q (u_q^* dan v_q^*) yang berjarak z terhadap bidang tengah (x - y) sebagai fungsi peralihan virtuil titik p (u_p^* dan v_p^*) yang terletak pada permukaan/ bidang tengah (referensi) dan sebagai fungsi variasi peralihan virtuil ($z \beta_x^*$) akibat rotasi segmen (z menyatakan jarak vertikal titik q terhadap titik p). Hubungan ini dapat dinyatakan oleh :

$$u_q^*(x,y,z) = u_p^*(x,y) + z \beta_x^*(x,y) \quad (2.3a)$$

$$v_q^*(x,y,z) = v_p^*(x,y) + z \beta_y^*(x,y) \quad (2.3b)$$

Hipotesa lain yang mendasari teori pelat Reissner-Mindlin adalah hipotesa konservasi ketebalan, yang menyatakan : “*semua titik yang terletak pada garis yang tegak lurus dengan bidang tengah, satu sama lain berjarak sama setelah berdeformasi*”. Dengan demikian, peralihan w_q independen terhadap variabel z dan hanya merupakan fungsi x dan y seperti yang terlihat dalam persamaan dibawah ini.

$$w_q^* = w^*(x,y) \quad (2.3c)$$

Dengan demikian persamaan lendutan virtuil yang didasarkan dari hipotesa pada teori pelat Reissner-Mindlin adalah :

$$\begin{Bmatrix} u_q^*(x,y,z) \\ v_q^*(x,y,z) \\ w_q^*(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_p^* \\ v_p^* \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \beta_x^*(x,y) \\ z \beta_y^*(x,y) \\ w^*(x,y) \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

β_x^* , β_y^* dinamakan rotasi virtuil dari vektor pq .

Jadi lendutan u dan v (arah x dan y), dari suatu titik sembarang pada penampang pelat, bervariasi linier terhadap z dan lendutan transversal w (arah z) hanya merupakan fungsi x dan y .

2.4.2 Deformasi Virtuil

Deformasi membran virtuil dan bending virtuil berdasarkan teori Reissner-Mindlin dinyatakan sebagai berikut ;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_q^* / \partial x \\ \partial v_q^* / \partial y \\ \partial u_q^* / \partial y + \partial v_q^* / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{p,x}^* \\ v_{p,y}^* \\ u_{p,y}^* + v_{p,x}^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\{\varepsilon^*\} = \{e^*\} + z \{\chi^*\} \quad (2.6)$$

$$\langle e^* \rangle = \begin{pmatrix} e_x^* & e_y^* & e_{xy}^* \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\langle \chi^* \rangle = \begin{pmatrix} \chi_x^* & \chi_y^* & \chi_{xy}^* \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

di mana :

$\langle \varepsilon \rangle$: deformasi virtuil pada pelat pada bidang x-y akibat efek membran dan bending.

$\langle e^* \rangle$: deformasi membran virtuil pada pelat pada bidang x-y.

$z \langle \chi^* \rangle$: deformasi bending virtuil pada bidang x-y-z.

$\langle \chi^* \rangle$: kelengkungan virtuil pada bidang x-y akibat efek bending.

dimana :

$$\text{Deformasi membran adalah ; } \begin{pmatrix} e_x^* \\ e_y^* \\ e_{xy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x}^* \\ v_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\text{Dan kelengkungan adalah ; } \begin{pmatrix} \chi_x^* \\ \chi_y^* \\ \chi_{xy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Deformasi GT virtuil yang terjadi pada bidang x-z dan y-z dinyatakan sebagai berikut :

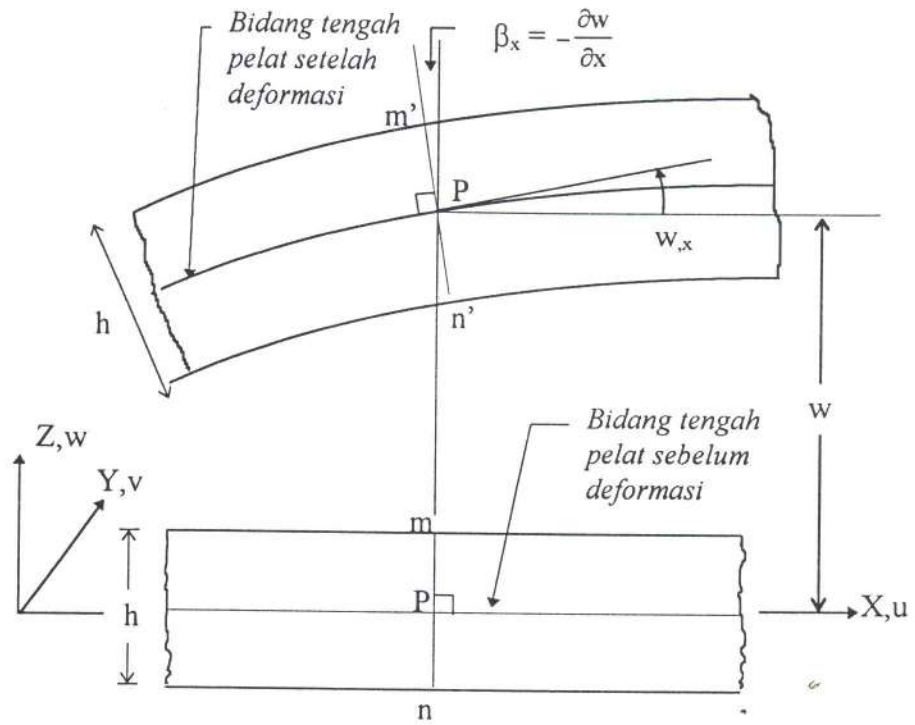
$$\{\gamma^*\} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{,x}^* + u_{,z}^* \\ w_{,y}^* + v_{,z}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{,x}^* + \beta_x^* \\ w_{,y}^* + \beta_y^* \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Dari persamaan 2.11, tampak bahwa deformasi geser yang terjadi sepanjang penampang pelat (arah z) adalah konstan.

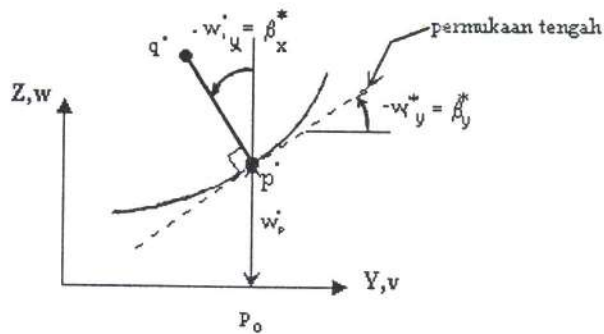
Hipotesa pada teori pelat Kirchhoff-Love menyatakan bahwa :

“ Titik-titik material, yang sebelum deformasi terletak pada garis lurus dan tegak lurus terhadap permukaan tengah, setelah deformasi akan tetap berada pada garis lurus dan harus tetap tegak lurus pada permukaan tengah “.

Berdasarkan hipotesa tersebut, maka kinematika pelat dapat digambarkan seperti pada halaman berikut (gambar 2.6 dan 2.7).



Gbr. 2.6 Peralihan virtual pelat tanpa deformasi geser pada bidang x-z



Gb. 2.7 Peralihan virtual pelat tanpa memperhitungkan pengaruh deformasi geser

Pada teori Kirchhoff-Love ini, persamaan deformasi gesernya adalah nol :

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x = 0 \text{ dan } \gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y = 0 \quad (2.12a)$$

dengan demikian :

$$\beta_x = -w_{,x} \text{ dan } \beta_y = -w_{,y} \quad (2.12b)$$

Jadi peranan pengaruh deformasi GT diabaikan. Hal ini sesuai, apabila diterapkan dalam pelat tipis, namun pada pelat tebal seringkali peranan pengaruh geser tidak dapat diabaikan sama sekali.

Selanjutnya, kelengkungan virtualnya dapat dinyatakan oleh :

$$\begin{Bmatrix} \chi_x^* \\ \chi_y^* \\ \chi_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{,xx}^* \\ -w_{,yy}^* \\ -2w_{,xy}^* \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

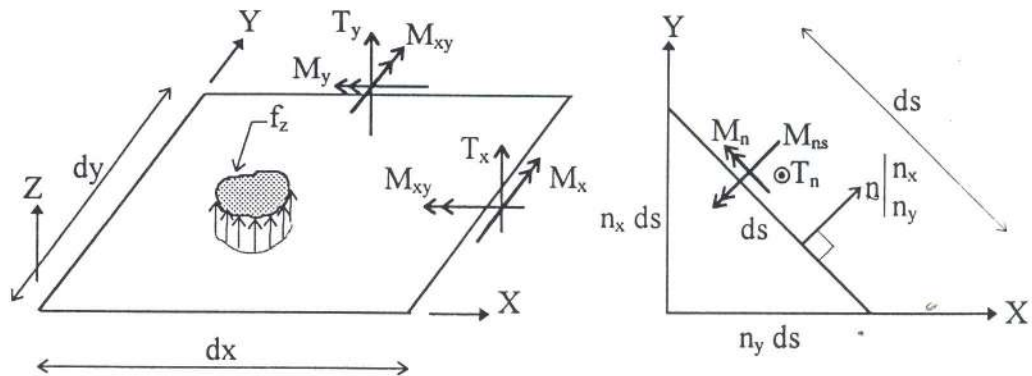
Dari persamaan (2.13) dapat kita lihat bahwa formulasi elemen hingga membutuhkan aproksimasi C^1 untuk peralihan transversal w , sedangkan fungsi rotasi β_x dan β_y tidak perlu diaproksimasi karena rotasi adalah merupakan turunan pertama dari transversal w . Aproksimasi C^0 untuk persamaan (2.9), (2.10) dan (2.11).

2.5 PERSAMAAN KESEIMBANGAN.

Persamaan keseimbangan pada pelat dalam suatu elemen $(dx)(dy)$ pada kondisi statik dan elastis-linier dengan beban merata pada permukaan (f_z) adalah mirip dengan persamaan pada struktur solid 3D, yaitu :

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} + f_x &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} + f_y &= 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} + f_z &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - T_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

di mana N_x , N_y dan N_{xy} adalah gaya membran, sedangkan T_x , T_y , M_x , M_y dan M_{xy} adalah gaya geser transversal dan momen bending per satuan panjang.

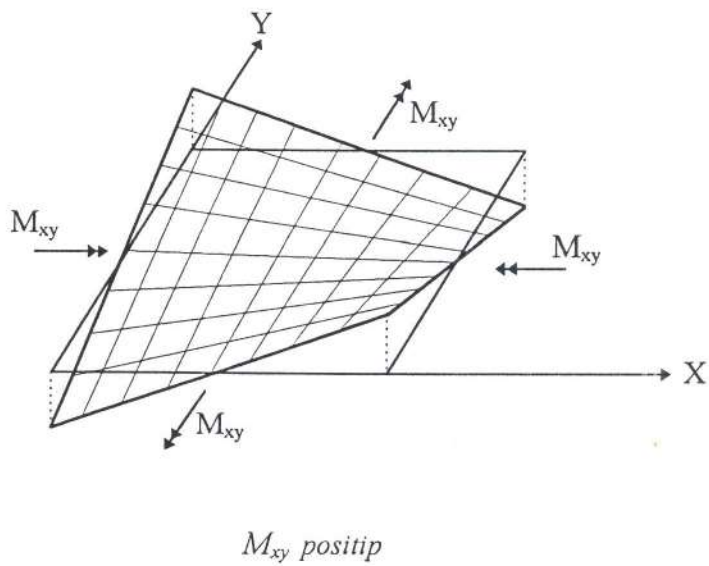
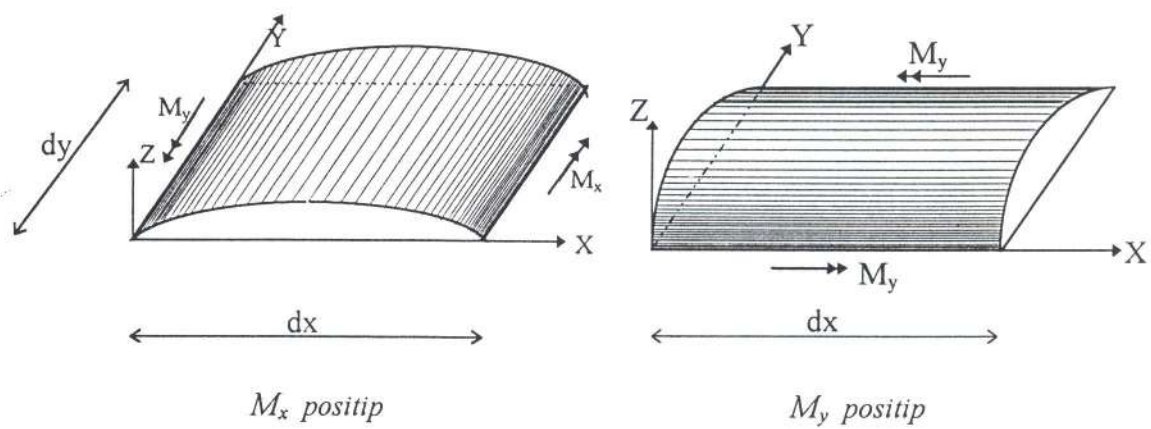


a) Resultan tegangan pada elemen diferensial suatu pelat homogen

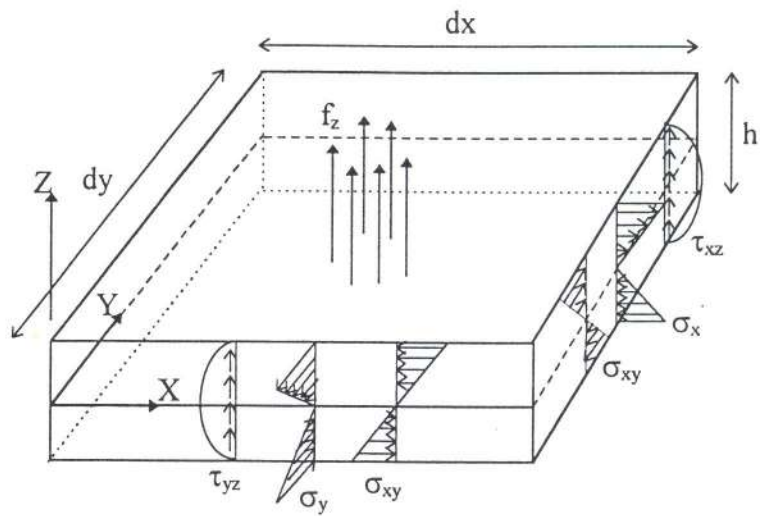
b) Resultan tegangan pada diferensial tepi pelat (ds) homogen

- M_n = resultan tegangan σ_n
- M_{ns} = resultan tegangan σ_{ns}
- T_n = resultan tegangan σ_{nz}
- M_x = momen bending yang bekerja dalam bidang X-Z
- M_y = momen bending yang bekerja dalam bidang Y-Z
- M_{xy} = momen torsi
- T_x, T_y = gaya geser transversal yang bekerja pada bidang Y-Z dan X-Z

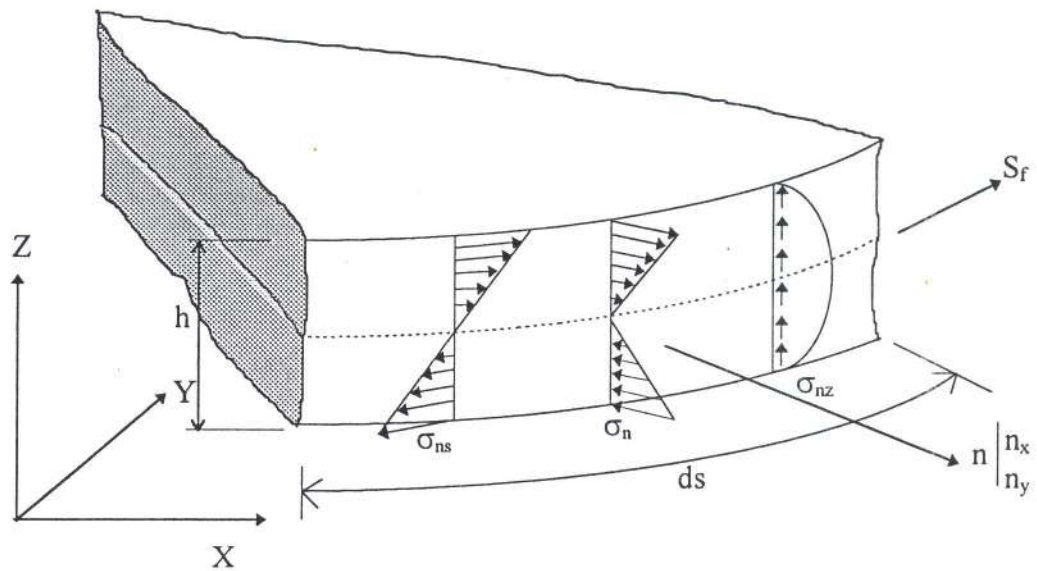
Gbr. 2.8 Resultan tegangan pada elemen diferensial pelat



Gbr. 2.9 Arah momen positif



a) Tegangan pada elemen diferensial (dA) suatu pelat homogen.



b) Tegangan pada diferensial tepi pelat (ds) suatu pelat homogen

Gbr. 2.10 Tegangan yang bekerja pada elemen pelat homogen

Kondisi batas untuk diferensial pelat pada gambar 2.8 adalah :

$$u = \bar{u} ; v = \bar{v} ; w = \bar{w} ; \beta_x = \bar{\beta}_x ; \beta_y = \bar{\beta}_y \text{ pada } S_u$$

Untuk semua titik pada kontur S_f , di mana $S_u \cup S_f = S = \partial A$, besarnya gaya-gaya N_{xn} , N_{yn} , T_n , M_{xn} dan M_{yn} adalah :

$$\begin{aligned} N_{xn} &= N_x \cdot n_x + N_{xy} \cdot n_y \\ N_{yn} &= N_{xy} \cdot n_x + N_y \cdot n_y \\ T_n &= T_x \cdot n_x + T_y \cdot n_y = F_z \\ M_{xn} &= M_x \cdot n_x + M_{xy} \cdot n_y = m_x \\ M_{yn} &= M_{xy} \cdot n_x + M_y \cdot n_y = m_y \end{aligned} \quad (2.15)$$

di mana,

S_f adalah sisi tepi pelat dimana bekerja gaya f

S_u adalah sisi tepi pelat dimana kondisi batasnya diketahui

n_x dan n_y adalah cosinus arah daripada normal (pada S_f) yang mengarah keluar.

Pada S_f besarnya harga T_n , M_{xn} dan M_{yn} menyatakan besarnya gaya-gaya yang diberikan, yaitu F_z (beban terpusat), m_x dan m_y . Pada kondisi batas S_u , besarnya harga T_n , M_{xn} dan M_{yn} menyatakan gaya-gaya reaksi perletakan pelat.

Dengan melihat gambar 2.8 dan 2.10, terlihat bahwa gaya-gaya yang ada merupakan resultan daripada tegangan σ_x , σ_y , σ_{xy} , τ_{xz} dan τ_{yz} . Gaya resultan di atas didapat dari persamaan berikut ini di mana dinyatakan hubungan antara tegangan dan gaya yang terjadi :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.16)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z \cdot dz \quad (2.17)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.18)$$

Di mana σ_x , σ_y dan σ_{xy} adalah tegangan normal dan geser pada permukaan x-y yang bervariasi linier terhadap z. Sedangkan τ_{xz} dan τ_{yz} bervariasi kuadratik terhadap z.

2.6 HUBUNGAN GAYA RESULTAN - DEFORMASI

Dalam hal pelat lentur sebagai suatu struktur plane stress maka digunakan hipotesa yang menyatakan bahwa tegangan $\sigma_z = 0$ sehingga dimungkinkan untuk merumuskan suatu hubungan antara tegangan dan regangan (tanpa tegangan awal) yang elastis-linier (hukum Hooke) dalam bentuk sebagai berikut :

$$\{\sigma\} = [H_\sigma]\{\underline{\varepsilon}\} \text{ dan } \{\tau\} = [H_\tau]\{\underline{\gamma}\} \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [H_\sigma] \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_x \\ \underline{\varepsilon}_y \\ \underline{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [H_\tau] \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

di mana ,

$\{\underline{\varepsilon}\}$ dan $\{\underline{\gamma}\}$ adalah deformasi independen pada permukaan xy, xz dan yz, tanda garis di bawahnya melambangkan ketidakbergantungan (independen) variabel yang bersangkutan, maksudnya kita dapat mendefinisikannya secara sama ataupun berbeda dengan rumusan persamaan deformasi regangan virtuil yang telah dinyatakan sebelumnya (persamaan (2.5) - (2.11)).

Untuk material isotrop dan homogen, matriks $[H_\sigma]$ dan $[H_\tau]$ pada pelat lentur adalah :

$$[H_\sigma] = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[H_\tau] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ di mana } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.23)$$

Dengan memperhatikan rumusan persamaan yang menunjukkan hubungan antara tegangan dan gaya, maka diperoleh persamaan berikut :

$$\{N\} = [H_m] \{e\} \quad (2.24)$$

$$\{M\} = [H_b] \{\underline{\chi}\} \quad (2.25)$$

$$\{T\} = [H_s] \{\underline{\gamma}\} \quad (2.26)$$

tanda garis dibawah e , χ dan γ menyatakan bahwa kita boleh menyatakannya secara independen, artinya didefinisikan sama atau berbeda dengan persamaan sebelumnya (pers.2.9-11). Dalam batasan teori linier, deformasi membran, kelengkungan dan deformasi geser transversal dapat dinyatakan dalam :

$$\{e\} - \{\underline{e}\} = 0 ; \langle e \rangle = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} & v_{,y} & (u_{,y} + v_{,x}) \end{pmatrix} \quad (2.27a)$$

$$\{\chi\} - \{\underline{\chi}\} = 0 ; \langle \chi \rangle = \begin{pmatrix} \chi_x & \chi_y & \chi_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{x,x} & \beta_{y,y} & (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{pmatrix} \quad (2.27b)$$

$$\{\gamma\} - \{\underline{\gamma}\} = 0 ; \langle \gamma \rangle = \begin{pmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w_{,x} + \beta_x) & (w_{,y} + \beta_y) \end{pmatrix} \quad (2.27c)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [H_m] \begin{Bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_{xy} \end{Bmatrix} ; [H_m] = D_m \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; D_m = \frac{E h}{(1-\nu^2)} \quad (2.28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [H_b] \begin{Bmatrix} \underline{\chi}_x \\ \underline{\chi}_y \\ \underline{\chi}_{xy} \end{Bmatrix} ; [H_b] = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; D_b = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.29)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [H_s] \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} ; [H_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; D_s = k.G.h \quad (2.30)$$

dimana :

D_m = kekakuan membran

D_b = kekakuan bending

D_s = kekakuan geser

G = modulus geser = $\frac{E}{2(1+\nu)}$

k = koefisien koreksi geser ; h = tebal pelat

Munculnya faktor k , sebagai faktor koreksi geser, adalah untuk mendapatkan tegangan geser yang sebenarnya pada sepanjang ketebalan pelat, hal ini sebagai antisipasi dari akibat asumsi pada teori pelat yang mendefinisikan pelat sebagai struktur 2 dimensi dengan bidang tengahnya sebagai bidang referensi (beban dianggap bekerja langsung pada bidang tengah). Sehingga akan diperoleh suatu kondisi di mana tegangan geser pada permukaan superior dan inferior adalah nol ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) dan maksimum di tengah penampang dengan demikian tegangan GT bervariasi secara kuadrat dalam arah z . Sedangkan dalam teori Reissner-Mindlin $\langle \gamma_{xz} \gamma_{yz} \rangle$ dinyatakan konstan dalam arah z . Bila kita perhatikan persamaan (2.21), maka akan kita sadari ketidaktepatan relasi tersebut. Karena didalam MEH kita menggunakan prinsip Energi/ Kerja Virtual maka ketidaktepatan tersebut perlu dikoreksi oleh suatu koefisien koreksi GT k . Dalam kasus pelat isotrop-homogen, umumnya digunakan koefisien koreksi geser Reissner, $k = 5/6$ untuk kasus statik atau koefisien koreksi geser Mindlin, $k = \pi^2/12$ untuk kasus dinamik.

2.7 PRINSIP KERJA VIRTUIL

Prinsip kerja virtual menyatakan suatu kondisi, di mana bila pada suatu struktur dalam keadaan seimbang dikerjakan padanya suatu peralihan virtual yang kecil, maka kerja virtual dari beban luar tadi sama dengan energi regangan virtual dari tegangan dalamnya.

Prinsip kerja virtual (PKV) Prinsip Minimum Energi Potensial Total (PMEPT), mempunyai peranan yang sangat penting dalam MEH. Penjabaran energi potensial berikut dilakukan berkenaan dengan perumusan persoalan pelat.

Prinsip kerja virtual yang diperoleh dari formulasi integral (variasional) bentuk lemah (weak form) daripada suatu persamaan keseimbangan pelat adalah :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 ; \quad \forall \{u^*\}, \{v^*\}, \{w^*\}, \{\beta^*\} \quad (2.31)$$

W_{int} dan W_{ext} adalah kerja virtual dalam dan luar, di mana persamaan untuk kerja dalamnya adalah :

$$W_{int} = W_{int}^m + W_{int}^b + W_{int}^s$$

dimana :

(2.32a)

$$\mathbb{W}_{\text{int}}^m = \int_A \langle e^* \rangle \{N\} dA ; \mathbb{W}_{\text{int}}^b = \int_A \langle \chi^* \rangle \{M\} dA ; \mathbb{W}_{\text{int}}^s = \int_A \langle \gamma^* \rangle \{T\} dA \quad (2.32b)$$

dan untuk kerja luarnya adalah :

$$\mathbb{W}_{\text{ext}} = \int_A (\langle u^* \rangle \{f\} + \langle \beta^* \rangle \{m\}) dA + \int_{S_f} (\langle u^* \rangle \{f_s\} + \langle \beta^* \rangle \{m_s\}) ds \quad (2.32c)$$

dengan,

f_s, m_s = gaya persatuan panjang yang bekerja pada S_f ($S_f \subset S$).

f, m = gaya persatuan luas pada permukaan tengah (bidang X-Y).

Pada model peralihan klasik pelat, gaya-gaya $\{N\}$, $\{M\}$ dan $\{T\}$ dihubungkan secara eksplisit dengan deformasi membran $\{e\}$, kelengkungan $\{\chi\}$ dan deformasi GT $\{\gamma\}$.

2.8 ENERGI POTENSIAL TOTAL

2.8.1 Bentuk Umum

Pada prinsip energi potensial total, akan kita peroleh keadaan setimbang suatu struktur apabila energi potensial totalnya adalah minimum atau disebut juga dalam kondisi stasioner.

Dengan melihat persamaan variasional dari prinsip kerja virtual di atas maka kondisi stasioner daripada energi potensial total Π (teorema Castigliano) dinyatakan dalam :

$$\delta(\Pi) = \delta W = 0 ; \forall \delta u \equiv u^* ; \delta v \equiv v^* ; \delta w \equiv w^* ; \delta \beta_x \equiv \beta_x^* ; \delta \beta_y \equiv \beta_y^* \quad (2.33)$$

dengan meminimumkan harga energi potensial total, kita akan dapat memperoleh matriks kekakuan elemen, masalah ini akan dibahas pada bab berikutnya.

Selanjutnya, energi potensial total dari elemen pelat bending dengan deformasi geser adalah :

$$\Pi = \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{ext}} \quad (2.34)$$

Di mana untuk energi dalamnya terdiri dari :

$$\Pi_{\text{int}} = \Pi_{\text{int}}^m + \Pi_{\text{int}}^b + \Pi_{\text{int}}^s \quad (2.35)$$

$$\Pi_{\text{int}}^m = \frac{1}{2} \int_A \langle e \rangle \{N\} dA \quad ; \quad \Pi_{\text{int}}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle \{M\} dA \quad ; \quad \Pi_{\text{int}}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \gamma \rangle \{T\} dA \quad (2.36)$$

dengan memasukkan persamaan 2.28-30 ke dalam 2.36 maka energi dalamnya menjadi :

$$\Pi_{\text{int}}^m = \frac{1}{2} \int_A \langle e \rangle [H_m] \{e\} dA \quad (2.37a)$$

$$\Pi_{\text{int}}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [H_b] \{\chi\} dA \quad (2.37b)$$

$$\Pi_{\text{int}}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \gamma \rangle [H_s] \{\gamma\} dA \quad (2.37c)$$

Sedangkan untuk energi luarnya, dinyatakan dalam :

$$\Pi_{\text{ext}} = \int_A (\langle u \rangle \{f\} + \langle \beta \rangle \{m\}) dA + \int_{S_f} (\langle u \rangle \{f_s\} + \langle \beta \rangle \{m_s\}) ds \quad (2.38)$$

di mana,

Π adalah energi potensial total

Π_{int}^m adalah energi dalam daripada deformasi membran

Π_{int}^s adalah energi dalam daripada deformasi geser

Π_{int}^b adalah energi dalam daripada deformasi bending

Π_{ext} adalah energi potensial luar akibat beban permukaan dan beban tepi

F_z, m_x, m_y adalah gaya persatuan panjang (bekerja pada S_f)

f_z adalah gaya persatuan luas pada permukaan tengah.

S_f adalah bagian tepi luar pelat

Pada elemen DKMT, dilakukan modifikasi terhadap energi dalam daripada deformasi geser. Seperti yang akan dijelaskan pada sub bab berikut ini.

2.8.2 Modifikasi Fungsional Persamaan Energi

Pada formulasi elemen DKMT ini, dideskripsikan persoalan pelat dengan memperhitungkan deformasi geser yang didasarkan pada teori pelat Reissner-Mindlin di mana dalam perumusan energi potensialnya digunakan teknik modifikasi fungsional Hu-Washizu.

Adapun bentuk fungsional daripada modifikasi Hu-Washizu, yang dikenakan pada persamaan energi potensial internal adalah :

$$\Pi_{\text{int}}^m = \frac{1}{2} \int_A \langle e \rangle [H_m] \{e\} dA \quad (2.39)$$

$$\Pi_{\text{int}}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [H_b] \{\chi\} dA \quad (2.40)$$

$$\Pi_{\text{int}}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \underline{\gamma} \rangle [H_s] \{\underline{\gamma}\} dA + I \quad (2.41)$$

$$I = \int_A \langle T \rangle \left(\{\gamma\} - \{\underline{\gamma}\} \right) dA \quad (2.42a)$$

Pada bentuk fungsional di atas, harga variabel yang independen adalah u , v , w , β_x , β_y , γ_x , γ_y dan T_x , T_y . Aproksimasi variabel-variabel independen harus dikondisikan sedemikian rupa supaya diperoleh harga deformasi geser yang konstan atau nol secara benar, sehingga diperoleh elemen yang bebas dari problem *spurious mode* maupun *shear locking* (blokada geser).

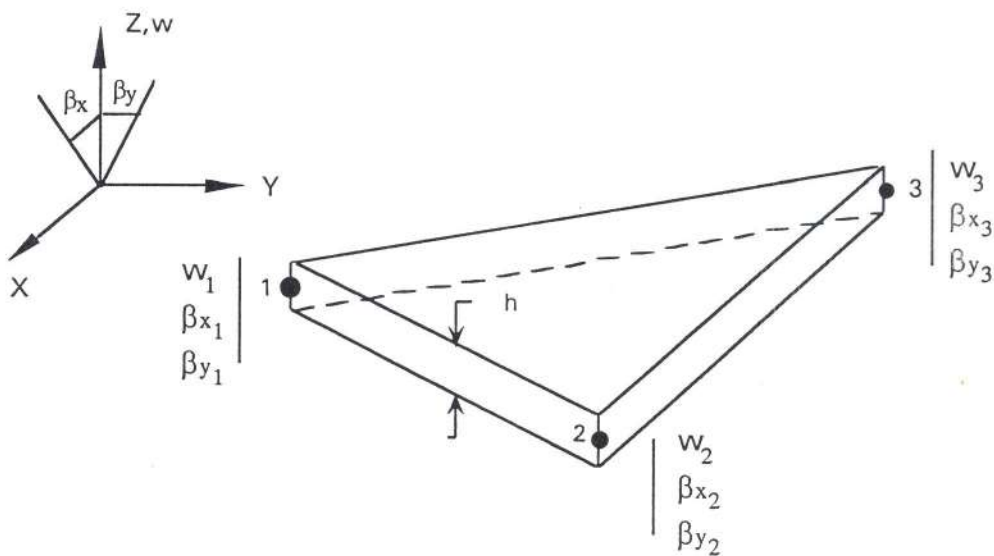
BAB III

FORMULASI ELEMEN DKMT

3.1 UMUM

Elemen DKMT (Discrete Kirchhoff Mindlin Triangular) terdiri dari 3 nodal sudut dengan 3 derajat kebebasan per nodal, yaitu :

1. w , translasi arah Z
2. β_x , putaran sudut pada bidang x - z
3. β_y , putaran sudut pada bidang y - z



Gbr. 3.1 Elemen pelat bending DKMT (Discrete Kirchhoff Mindlin Triangular)

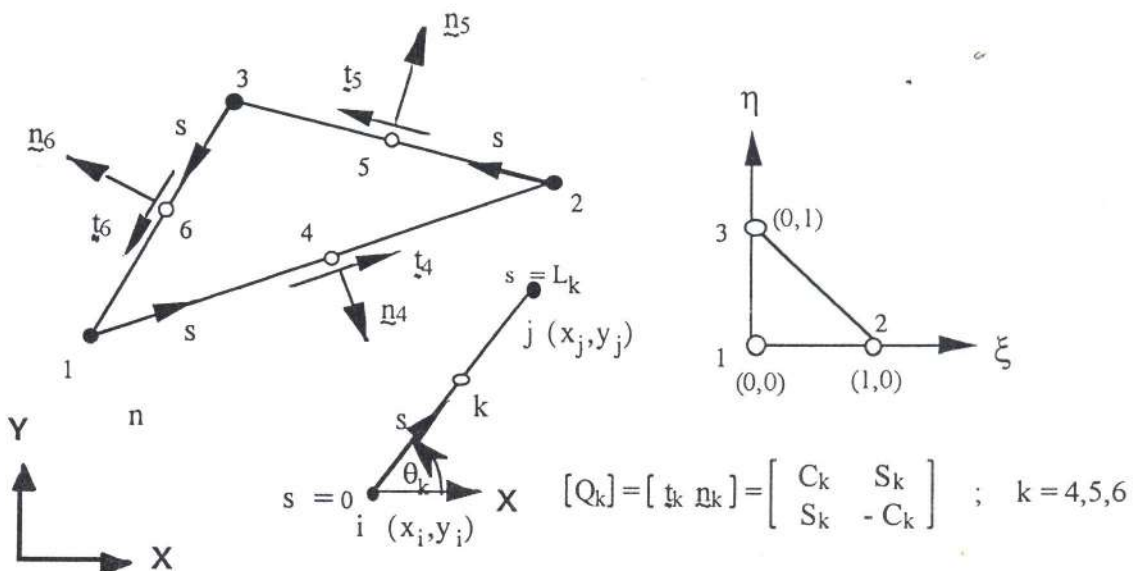
Bentuk geometri pelat diwakili oleh sejumlah elemen triangular dengan masing-masing elemen menggunakan pendekatan linier terhadap nilai koordinat nodal sudut. Sedangkan fungsi peralihannya diaproksimasi dengan pendekatan linier pada variabel nodal sudut dan kuadratik pada variabel nodal (inkrimental rotasi tangensial) sisi tengah elemen. Selanjutnya persamaan energi elemen ini diformulasikan dengan menggunakan teknik Discrete Kirchhoff Mindlin dan fungsional modifikasi dari Hu-Washizu. Dengan teknik formulasi ini, masalah *spurious mode* dan *shear locking* berhasil diatasi.

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah penurunan rumus untuk mendapatkan formulasi elemen DKMT, khususnya dalam perolehan matriks kekakuannya.

3.2 APROKSIMASI FUNGSI GEOMETRI

Untuk elemen DKMT aproksimasi fungsi geometri dinyatakan dengan fungsi linier, di mana :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$



$$C_k = \cos \theta_k = x_{ji} / L_k ; \quad S_k = \sin \theta_k = y_{ji} / L_k ; \quad (L_k)^2 = (x_{ji})^2 + (y_{ji})^2$$

$$x_{ji} = x_j - x_i ; \quad y_{ji} = y_j - y_i$$

Gbr 3.2 Elemen dalam sistem koordinat kartesian (x-y),
koordinat normal tangensial (n-s) dan koordinat natural (ξ - η)

N_i = fungsi bentuk dalam sistim koordinat natural pada nodal-i ($i=1,2,3$), lihat tabel I

x, y = koordinat titik sembarang yang ditinjau pada elemen.

x_i, y_i = koordinat global dari nodal-i

ξ_i, η_i = koordinat natural dari titik nodal yang ditinjau

Persamaan 3.1 memperlihatkan hubungan antara koordinat global dengan koordinat natural elemen. Selanjutnya, hubungan antara turunan pertama fungsi transformasi koordinat global dengan turunan pertama dari fungsi transformasi koordinat natural adalah :

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial y} \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial y} \quad (3.2b)$$

atau :

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

dengan :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}; \quad x_{ji} = x_j - x_i \quad (3.4)$$

Matrik [J] disebut matrik Jacobian. Determinan dari matrik Jacobian ini adalah :

$$|J| = x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi} = 2A = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21} \quad (3.5)$$

di mana A = luas elemen segitiga.

Persamaan (3.3) dapat pula dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

dengan :

$$[j] = [J]^{-1} = \text{invers matrik Jacobian.}$$

atau :

$$[j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

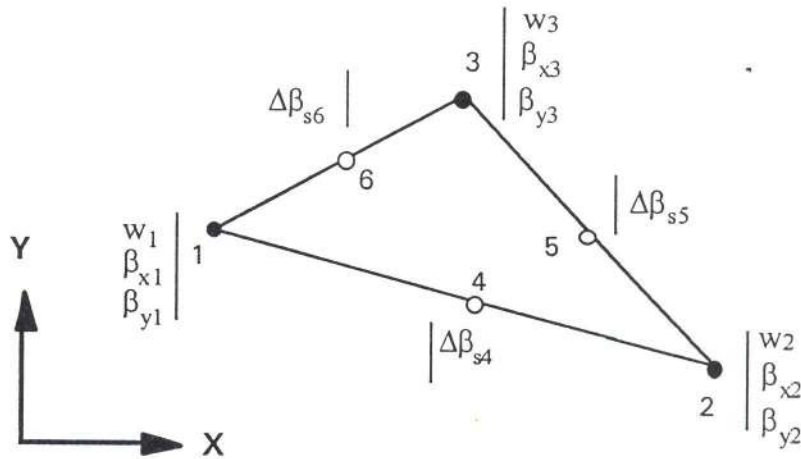
3.3 APROKSIMASI FUNGSI PERALIHAN

Fungsi peralihan untuk setiap elemen dapat diaproksimasi dengan cara menginterpolasi variabel nodalnya. Fungsi aproksimasi peralihan untuk elemen DKMT dinyatakan oleh :

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i \quad (3.8a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} + \sum_{k=4}^6 P_k C_k \Delta \beta_{s_k} \quad (3.8b)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi} + \sum_{k=4}^6 P_k S_k \Delta \beta_{s_k} \quad (3.8c)$$



Gbr.3.3 Data kinematis variabel nodal sudut dan variabel nodal sisi tengah elemen.

di mana :

w = fungsi peralihan untuk translasi vertikal (arah sumbu z).

β_x, β_y = fungsi peralihan untuk rotasi dalam bidang z-x dan z-y.

N_i = fungsi bentuk linier untuk nodal sudut (nodal 1,2,3).

P_k = fungsi bentuk kuadratik untuk nodal tengah (nodal 4,5,6).

w_i = variabel peralihan translasi vertikal (arah sumbu z) pada nodal i ($i = 1,2,3$), lihat gambar 3.3.

β_{xi}, β_{yi} = variabel rotasi dalam bidang z-x dan z-y pada nodal sudut i ($i = 1,2,3$), lihat gambar 3.3.

$\Delta\beta_{s_k}$ = variabel inkremental rotasi dalam bidang z-s pada nodal k (k = 4,5,6) tengah sisi elemen (nodal 4,5,6). Variabel nodal ini pada akhirnya akan dieliminasi dengan teknik diskrit Kirchhoff Mindlin.

C_k, S_k = arah cosinus dan sinus dari sisi-k

N_i merupakan fungsi polinomial lengkap sehubungan dengan rigid-constant modes (rc-modes) dan P_k adalah fungsi orde tinggi (h-modes). N_i dan P_k diberikan pada tabel I.

Table I : fungsi bentuk

$N_1 = \lambda$	$P_4 = 4\lambda\xi$
$N_2 = \xi$	$P_5 = 4\xi\eta$
$N_3 = \eta$	$P_6 = 4\lambda\eta$

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

3.4 VEKTOR KELENGKUNGAN

Dengan memperhatikan persamaan 2.27b dan 3.8, yang menunjukkan *hubungan antara kelengkungan dan peralihan*, maka vektor kelengkungan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\langle \chi \rangle = [B_{b\beta}] \{U_n\} + [B_{b\Delta\beta}] \{\Delta\beta_n\} \quad (3.9)$$

Persamaan 3.9 di atas, memperlihatkan hubungan antara vektor kelengkungan dengan peralihan nodal, dan matrik penghubungnya adalah matrik regangan bending. Selanjutnya, masing-masing matrik tersebut diekspresikan dalam bentuk seperti di bawah ini.

Bentuk matrik kelengkungan-peralihan $[B_{b\beta}]$ adalah sebagai berikut :

$$[B_{b\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & & \\ \dots & 0 & 0 & N_{i,y} & \dots \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & & \end{bmatrix} \quad i = 1,2,3 \quad (3.10)$$

di mana dari penjabaran persamaan 3.10, diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta} \\ N_{i,y} &= j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dengan memasukan nilai-nilai term jacobian invers (pers.3.7) akhirnya diperoleh :

$$[B_{b\beta}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & -y_{32} & 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & -y_{21} & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{32} & -y_{32} & 0 & x_{13} & -y_{13} & 0 & x_{21} & -y_{21} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Sedangkan bentuk matrik kelengkungan-peralihan inkrimental bending $[B_{b\Delta\beta}]$ adalah sebagai berikut :

$$[B_{b\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} P_{k,x}C_k \\ \dots & P_{k,y}S_k & \dots & k = 4,5,6 \\ P_{k,y}C_k + P_{k,x}S_k \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

di mana dengan cara yang sama dalam perolehan persamaan 3.10, maka :

$$\begin{aligned} P_{k,x} &= j_{11} P_{k,\xi} + j_{12} P_{k,\eta} \\ P_{k,y} &= j_{21} P_{k,\xi} + j_{22} P_{k,\eta} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dan menggantikan term jacobian invers dari persamaan 3.7, akan diperoleh :

$$[B_{b\Delta\beta}] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} -(P_{k,\xi} y_{13} + P_{k,\eta} y_{21}) C_k \\ \dots & (P_{k,\xi} x_{13} + P_{k,\eta} x_{21}) S_k & \dots & k=4,5,6 \\ (P_{k,\xi} x_{13} + P_{k,\eta} x_{21}) C_k - (P_{k,\xi} y_{13} + P_{k,\eta} y_{21}) S_k \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sedangkan vektor peralihan nodalnya adalah :

$$\langle U_n \rangle = \langle w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad w_2 \quad \beta_{x2} \quad \beta_{y2} \quad w_3 \quad \beta_{x3} \quad \beta_{y3} \rangle \quad (3.16)$$

dan vektor peralihan rotasi inkrimentalnya adalah :

$$\langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{s4} \quad \Delta\beta_{s5} \quad \Delta\beta_{s6} \rangle \quad (3.17)$$

3.5 ASUMSI VEKTOR GESER TRANSVERSAL (GT).

Untuk tiap sisi elemen, di nodal-nodal sudutnya dibuatkan suatu sistem koordinat lokal dengan sumbu koordinat n-s (gambar 3.2), di mana sumbu-s adalah sumbu yang terletak dan searah dengan sisi elemen, sedangkan sumbu-n adalah sumbu normal yang tegak lurus sisi-k elemen yang bersangkutan. Selanjutnya dikembangkan persamaan dasar dari deformasi geser transversal (GT), di mana deformasi geser sepanjang sisi-k (gambar 3.4) didefinisikan sebagai deformasi GT independen dan dapat dinyatakan sebagai :

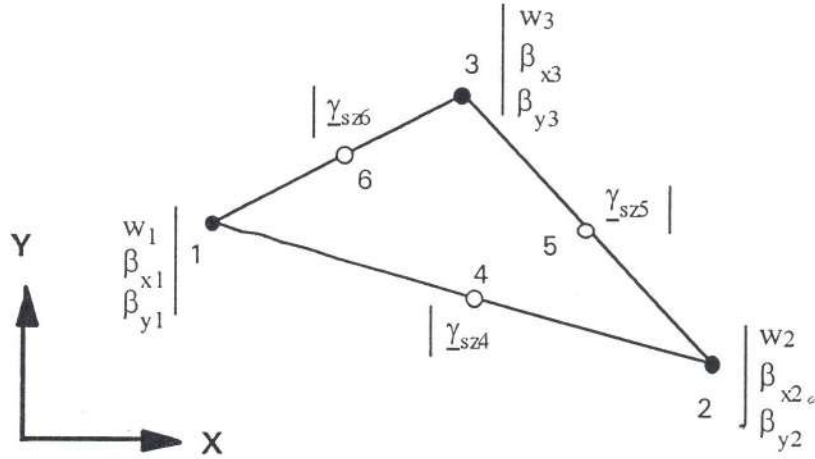
$$\gamma_{sz} = \frac{T_s}{D_s} \quad (3.18)$$

di mana ;

$$D_s = k.G.h$$

γ_{sz} = deformasi GT yang didefinisikan secara independen

T_s = gaya GT tangensial sepanjang sisi-k



Gbr.3.4 Data kinematis dan deformasi geser lintang tangensial pada nodal 4,5, 6.

Bila ke dalam persamaan 3.18 di atas, dimasukkan harga persamaan keseimbangan dalam bentuk berikut ini :

$$T_s = M_{s,s} + M_{ns,s} \quad (3.19)$$

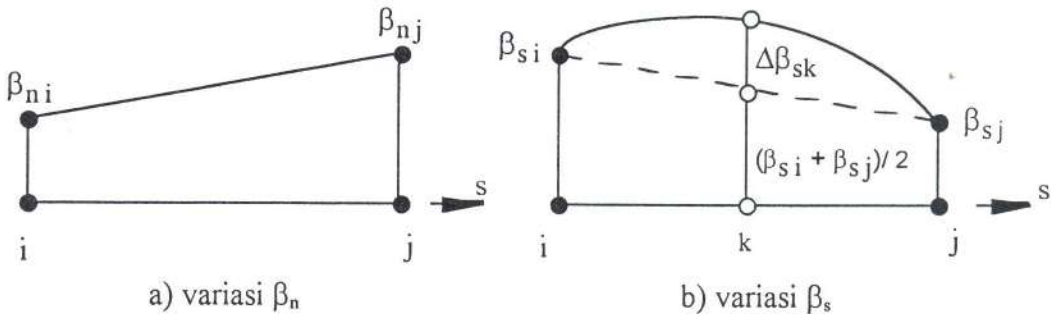
Di mana persamaan konstitutif momen bending pada setiap sisi dinyatakan oleh :

$$M_s = D_b (\beta_{s,s} + \nu \beta_{n,n}) \quad (3.20)$$

$$M_{ns} = D_b \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{s,n} + \beta_{n,s}) \quad (3.21)$$

Maka persamaan untuk fungsi independen daripada deformasi geser lintang pada persamaan 3.18 dapat diexpresikan menjadi :

$$\gamma_{sz} = \frac{D_b}{D_s} \left(\beta_{s,ss} + \nu \beta_{n,ns} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,nn} + \beta_{n,ns}) \right) \quad (3.22)$$



Gbr. 3.5 Variasi β_n dan β_s sepanjang sisi elemen

Dari gambar 3.5a, tampak bahwa rotasi β_n bervariasi linier sepanjang sisi-k, dengan masing-masing rotasi pada nodal ujung sebesar β_{ni} dan β_{nj} , sehingga harga interpolasi rotasi pada sisi-k dalam arah normal (searah sumbu-n) adalah :

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{ni} + \frac{s}{L_k} \beta_{nj} \quad (3.23)$$

Apabila β_n diturunkan terhadap s lalu n , hasilnya adalah :

$$\beta_{n,ns} = 0 \quad (3.24)$$

Dan dari gambar 3.5b, tampak bahwa rotasi β_s bervariasi secara kuadratik sepanjang sisi-k, di mana pada kedua ujung sisi-k terjadi rotasi sebesar β_{si} dan β_{sj} , sedangkan pada nodal tengah terdapat inkremental rotasi tangensial ($\Delta\beta_{sk}$) yang membentuk pertambahan fungsi interpolasi secara kuadratik pada interpolasi linier di bawahnya, maka rotasi β_s menjadi :

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{si} + \left(\frac{s}{L_k}\right) \beta_{sj} + 4 \frac{s}{L_k} \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \Delta\beta_{sk} \quad (3.25)$$

Lalu turunan kedua dari β_s terhadap n dan s adalah :

$$\beta_{s,nn} = 0 \quad (3.26)$$

$$\beta_{s,ss} = -\frac{8}{L_k^2} \Delta\beta_{sk} \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.22), (3.24) dan (3.26) akan diperoleh persamaan deformasi geser sebagai berikut :

$$\gamma_{sz} = \frac{D_b}{D_s} \beta_{s,ss} \quad (3.28)$$

Dan dari persamaan (2.31b), (2.32b), (3.27) dan (3.28) diperoleh suatu persamaan unik untuk elemen DKMT ini, yaitu :

$$\gamma_{szk} = \frac{D_b}{D_s} \beta_{s,ss} = -\frac{2}{3} \phi_k \Delta\beta_{sk} \quad (3.29)$$

di mana,

$$\phi_k = \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{k(1-\nu)} \frac{h^2}{L_k^2} \quad (3.30)$$

keterangan :

= rasio Poisson ; h = tebal pelat ; L_k = panjang sisi-k
 $k = 5/6$, nilai koefisien koreksi GT dari Reissner

ϕ_k = faktor besarnya pengaruh deformasi geser lintang

Keunikan dari faktor ϕ_k adalah dalam hal menjaga konsistensi perilaku elemen. Faktor h^2/L_k^2 , dalam persamaan tersebut, memberikan suatu hasil yang mampu membuat elemen DKMT berperilaku sesuai teori Reissner-Mindlin ketika menganalisa elemen pelat tebal dan juga sesuai teori pelat Kirchhoff-Love ketika menganalisa pelat tipis di mana harga h^2/L_k^2 mendekati nol sehingga otomatis nilai deformasi GT dapat diabaikan, akibatnya masalah *shear locking* teratasi dengan cara ini.

Deformasi geser lintang tangensial $\underline{\gamma}_{sz_k}$ dan $\underline{\gamma}_{sz_m}$ pada sisi k dan m (lihat gbr.3.4) dapat diproyeksikan dalam deformasi GT di sudut i yaitu $\underline{\gamma}_{xz_i}$ dan $\underline{\gamma}_{yz_i}$;

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{sz_k} \\ \underline{\gamma}_{sz_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ C_m & S_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz_i} \\ \underline{\gamma}_{yz_i} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

atau ;

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz_i} \\ \underline{\gamma}_{yz_i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_i} \begin{bmatrix} S_m & -S_k \\ -C_m & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{sz_k} \\ \underline{\gamma}_{sz_m} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\text{dengan ; } A_i = C_k S_m - C_m S_k \quad (3.33)$$

Nilai i , k dan m untuk pers.(3.32) dan (3.33) dinyatakan dalam tabel II ;

Tabel II : Nilai i , k dan m untuk persamaan (3.31-33)

i	k	m
1	4	6
2	5	4
3	6	5

kita peroleh ;

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz1} \\ \underline{\gamma}_{yz1} \\ \underline{\gamma}_{xz2} \\ \underline{\gamma}_{yz2} \\ \underline{\gamma}_{xz3} \\ \underline{\gamma}_{yz3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_6/A_1 & 0 & -S_4/A_1 \\ -C_6/A_1 & 0 & C_4/A_1 \\ -S_5/A_2 & S_4/A_2 & 0 \\ C_5/A_2 & -C_4/A_2 & 0 \\ 0 & -S_6/A_3 & S_5/A_3 \\ 0 & C_6/A_3 & -C_5/A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{sz4} \\ \underline{\gamma}_{sz5} \\ \underline{\gamma}_{sz6} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

dimana ;

$$\begin{aligned} A_1 &= C_4 S_6 - C_6 S_4 \\ A_2 &= C_5 S_4 - C_4 S_5 \\ A_3 &= C_6 S_5 - C_5 S_6 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Seperti halnya pada elemen-elemen triangular [A1, A2, H1, Z2] deformasi geser $\{\underline{\gamma}\}$ dapat diinterpolasi secara independen dengan cara sebagai berikut ;

$$\langle \underline{\gamma} \rangle = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz_i} \\ \underline{\gamma}_{yz_i} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

dimana N_i adalah fungsi bentuk linier (lihat tabel I) untuk elemen triangular. Dengan mengkombinasikan expressi (3.34 -36), kita peroleh ;

$$\langle \underline{\gamma} \rangle = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = [N_\gamma] \langle \underline{\gamma}_n \rangle \quad (3.37)$$

dimana ; $\langle \underline{\gamma}_n \rangle = (\underline{\gamma}_{sz4} \ \underline{\gamma}_{sz5} \ \underline{\gamma}_{sz6})$

$$[N_\gamma] = \begin{bmatrix} \left(\frac{S_6}{A_1} \lambda - \frac{S_5}{A_2} \xi \right) & \left(\frac{S_4}{A_2} \xi - \frac{S_6}{A_3} \eta \right) & \left(\frac{S_5}{A_3} \eta - \frac{S_4}{A_1} \lambda \right) \\ \left(\frac{C_5}{A_2} \xi - \frac{C_6}{A_1} \lambda \right) & \left(\frac{C_6}{A_3} \eta - \frac{C_4}{A_2} \xi \right) & \left(\frac{C_4}{A_1} \lambda - \frac{C_5}{A_3} \eta \right) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$\langle \underline{\gamma}_n \rangle$ adalah vektor daripada variabel deformasi GT independen.

Variabel $\{\gamma_n\}$ kemudian digantikan oleh variabel $\{\Delta\beta_n\}$ dengan menggunakan persamaan konstitutif dan persamaan keseimbangan pada ketiga sisi elemen triangular. Hasilnya telah dinyatakan oleh persamaan (3.29) dan karenanya diperoleh ;

$$\langle \underline{\gamma} \rangle = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = [B_{s\Delta\beta}] \langle \Delta\beta_n \rangle \quad (3.39)$$

dimana ;

$$[B_{s\Delta\beta}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{S_5}{A_2} \xi - \frac{S_6}{A_1} \lambda \right) \phi_4 & \left(\frac{S_6}{A_3} \eta - \frac{S_4}{A_2} \xi \right) \phi_5 & \left(\frac{S_4}{A_1} \lambda - \frac{S_5}{A_3} \eta \right) \phi_6 \\ \left(\frac{C_6}{A_1} \lambda - \frac{C_5}{A_2} \xi \right) \phi_4 & \left(\frac{C_4}{A_2} \xi - \frac{C_6}{A_3} \eta \right) \phi_5 & \left(\frac{C_5}{A_3} \eta - \frac{C_4}{A_1} \lambda \right) \phi_6 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.6 KONSTRAIN DISKRIT KIRCHHOFF MINDLIN.

Seperti telah disebutkan sebelumnya bahwa Modifikasi Fungsional Hu-Washizu digunakan untuk mengembangkan elemen pelat bending triangular DKMT ini.

Adapun prinsip modifikasi Hu-Washizu (2.40-41) dinyatakan sebagai :

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} \quad ; \quad \Pi_{int} = \Pi_{int}^b + \Pi_{int}^s \quad (3.41)$$

dengan

$$\Pi_{int}^b(\beta_x, \beta_y) = \frac{1}{2} \int_{A^e} \langle \chi \rangle [H_b] \{ \chi \} dA \quad (3.42)$$

$$\Pi_{int}^s(w, \beta_x, \beta_y, \{\gamma\}, \{T\}) = \frac{1}{2} \int_{A^e} \langle \underline{\gamma} \rangle [H_b] \{ \underline{\gamma} \} dA + \int_{A^e} \langle T \rangle (\{ \gamma \} - \{ \underline{\gamma} \}) dA \quad (3.43)$$

Bila fungsi Π diturunkan terhadap T dan kemudian dinyatakan dalam kondisi stasioner, akan diperoleh :

$$\int_{A^e} \langle \delta T \rangle (\{ \gamma \} - \{ \underline{\gamma} \}) dA = 0 \quad (3.44)$$

Persamaan 3.44 harus dipandang sebagai persamaan konstrain dan dalam hal ini ekuivalen dengan :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_k} \delta T_s (\gamma_{sz} - \underline{\gamma}_{sz}) ds &= 0 \\ k &= 4, 5, 6 \\ \gamma_{sz} &= w_{,s} + \beta_s \end{aligned} \quad (3.45)$$

T_s konstan pada sepanjang sisi-k.

Dengan menggunakan persamaan 3.25, maka persamaan konstrain 3.45 akan dinyatakan dengan diskrit untuk ketiga sisi elemen, didapat suatu hubungan berikut :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sz} - \underline{\gamma}_{sz}) ds = 0 \quad (3.46)$$

dan

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ -S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}_{i,j} \quad (3.47)$$

Dalam sistem koordinat lokal nodal, kita memiliki persamaan berikut,

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2L_k}{3} \Delta \beta_{sk} - L_k \underline{\gamma}_{sz_k} = 0 \quad (3.48a)$$

Apabila persamaan 3.28 dan 3.47 digunakan untuk menyatakan persamaan 3.48a ke dalam sistem koordinat global, maka akan diperoleh :

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \cdot \beta_{xi} + S_k \cdot \beta_{yi}) + \frac{L_k}{2} (C_k \cdot \beta_{xj} + S_k \cdot \beta_{yj}) + \frac{2L_k}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{sk} = 0 \quad (3.48b)$$

Nilai i, j dan k untuk persamaan (3.48a,b) dipresentasikan pada tabel III;

Tabel III : Nilai i, j dan k untuk persamaan (3.47-48)

i	j	k
1	2	4
2	3	5
3	1	6

Jika persamaan (3.48) diaplikasikan pada ketiga sisi elemen, vektor $\{\Delta\beta_n\}$ dapat dinyatakan dengan derajat kebebasan final $\{u_n\}$ oleh ;

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{U_n\} \quad (3.49)$$

$$[A_n] = [A_{\Delta\beta}]^{-1} [A_w] \quad (3.50)$$

dimana ;

$$[A_{\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} L_4 (1 + \phi_4) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} L_5 (1 + \phi_5) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} L_6 (1 + \phi_6) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$[A_{\Delta\beta}]$ selalu merupakan matrik diagonal non-singular untuk kasus pelat tipis maupun pelat tebal dan karenanya kompatibilitas dari β_s tidak hilang pada elemen DKMT.

$$[A_w] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-x_{21}}{2} & \frac{-y_{21}}{2} & -1 & \frac{-x_{21}}{2} & \frac{-y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-x_{32}}{2} & \frac{-y_{32}}{2} & -1 & \frac{-x_{32}}{2} & \frac{-y_{32}}{2} \\ -1 & \frac{-x_{13}}{2} & \frac{-y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-x_{13}}{2} & \frac{-y_{13}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$[A_w]$ adalah matrik 3x9 yang bergantung hanya pada koordinat nodal sudut.

3.7 MATRIX KEKAKUAN ELEMEN DKMT.

Dari persamaan 2.5, kita dapat melihat *hubungan antara regangan (ϵ) dan peralihan rotasi (β)*, di mana regangan merupakan fungsi linier dari turunan pertama peralihan rotasi. Dan dari persamaan 2.10, kita lihat definisi dari kelengkungan (χ), yaitu sebagai turunan pertama dari peralihan rotasi.

Secara umum, hubungan kelengkungan akibat deformasi bending dengan peralihan nodal dirumuskan sebagai :

$$\{\chi\} = [B_b] \{U_n\} \quad (3.53)$$

di mana untuk elemen DKMT ini, matrik kelengkungan yang menghubungkan vektor kelengkungan dan vektor peralihan nodal didefinisikan sebagai :

$$[B_b] = [B_{b\beta}] + [B_{b\Delta\beta}] [A_n] \quad (3.54)$$

Sedangkan matrik geser, yang menghubungkan vektor deformasi geser dengan vektor peralihan nodal dirumuskan sebagai :

$$\{\gamma\} = [B_s] \{U_n\} \quad (3.55)$$

Di mana untuk elemen DKMT ini, matrik regangan geser-peralihannya didefinisikan sebagai :

$$[B_s] = [B_{s\Delta\beta}] [A_n] \quad (3.56)$$

Pada waktu menghitung matrix kekakuan $[K_b]$ dan $[K_s]$, variabel nodal pada pers.3.16 harus dirubah terlebih dahulu susunannya, sebagai berikut :

$$\langle u_n \rangle = \langle w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \rangle \quad (3.57)$$

$$\text{dimana :} \quad \theta_{xi} = -\beta_{yi} \quad ; \quad \theta_{yi} = \beta_{xi} \quad ; \quad i = 1, 2, \quad (3.58)$$

Dengan menggunakan persamaan kelengkungan 3.53 dan 3.54, maka rumusan energi deformasi bending 3.42 untuk elemen dengan luas A^e dinyatakan sebagai :

$$\Pi_{int}^b = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [K_b] \{U_n\} \quad (3.59)$$

di mana,

$$[K_b] = \int_{A^e} [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \quad (3.60)$$

Sedangkan untuk energi geser (3.43), dengan memasukan persamaan 3.55 dan 3.56, yaitu :

$$\Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [K_s] \{U_n\} \quad (3.61)$$

di mana,

$$[K_s] = \int_{A^e} [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \quad (3.62)$$

Dalam kasus pelat tipis, di mana harga $\phi_k \ll 1$, besarnya energi geser transversal tersebut, persamaan 3.43, dapat diabaikan ($\Pi_s \Rightarrow 0$).

Selanjutnya, setelah mendapatkan rumusan matrik kekakuan geser dan lentur, akan diperoleh matrik kekakuan elemen dalam bentuk penjumlahan keduanya, yaitu :

$$[K] = [K_b] + [K_s] \quad (3.63)$$

Matrik kekakuan tersebut dihitung dengan cara integrasi numerik (menggunakan titik integrasi HAMMER) yaitu dengan menggunakan 3 buah titik integrasi. Formula integrasi numerik memungkinkan untuk mengevaluasi matrik $[K]$ dalam bentuk sebagai berikut :

$$[K] = \sum_{i=1}^{NPI} [B_s(\xi_i, \eta_i)]^T [H_s] [B_s(\xi_i, \eta_i)] \omega_i \det |J(\xi_i, \eta_i)| \quad (3.64)$$

dimana :

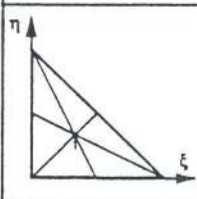
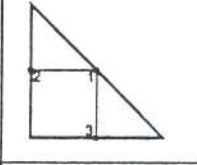
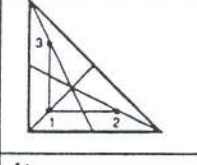
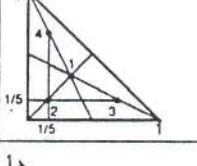
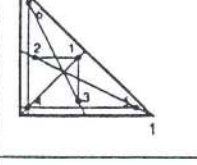
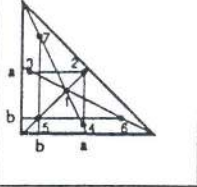
NPI = jumlah titik integrasi numerik yang digunakan pada elemen referensi

ξ_i, η_i = koordinat parametrik titik I

ω_i = koefisien (atau pembobot) untuk titik I

Formula diatas memungkinkan untuk mengintegrasi secara eksak untuk fungsi dalam ξ . Tabel IV berikut ini memberikan bobot ω_i dan koordinat ξ_i dan η_i untuk integrasi Hammer.

Tabel IV : Integritasi numerik formula Hammer untuk segitiga

	Ordre m	Nombre de points r	Coordonnées		Poids ω_i
			ξ_i	η_i	
	1	1	1/3	1/3	1/2
	2	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6
	2	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6
	3	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	$\left. \begin{array}{l} -27/96 \\ 25/96 \end{array} \right\}$
	4 $a = 0,445948490915965$ $b = 0,091576213509771$	6	a $1-2a$ a b $1-2b$ b	a a $1-2a$ b b $1-2b$	$\left. \begin{array}{l} 0,111690794839005 \\ 0,054975871827661 \end{array} \right\}$
	5 $a = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$ $= 0,470142064105115$ $b = \frac{4}{7} - a$ $= 0,101286507323456$	7	$1/3$ a $1-2a$ a b $1-2b$ b	$1/3$ a a $1-2a$ b b $1-2b$	$\left. \begin{array}{l} A = \frac{9/80 + 155 + \sqrt{15}}{2400} \\ = 0,0661970763942530 \\ \frac{31}{240} - A = \\ = 0,0629695902724135 \end{array} \right\}$
$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} y(\xi, \eta) d\eta d\xi \approx \sum_{i=1}^r \omega_i y(\xi_i, \eta_i)$ Formules intégrant exactement des polynômes $\xi^i \eta^j$ d'ordre m (avec $i + j < m$)					

BAB IV

FORMULASI ELEMEN ALLMAN

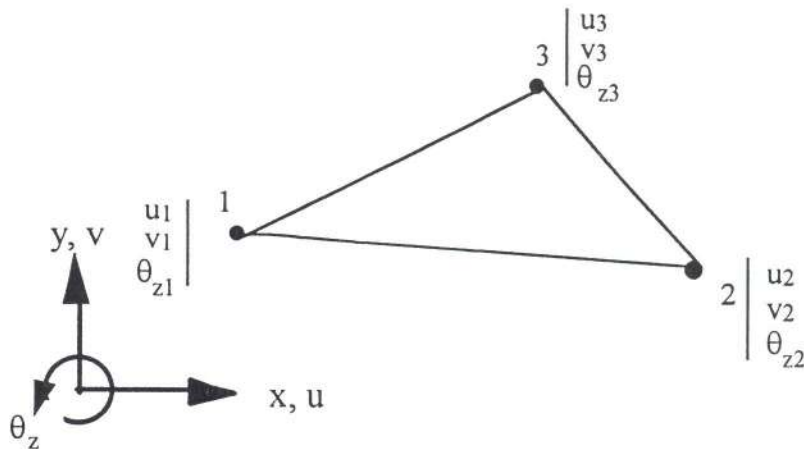
4.1 UMUM

Struktur pelat dimana hanya bekerja gaya-gaya membran (tarik, tekan dan geser pada bidang permukaan tengah pelat) disebut struktur membran. Modelisasi struktur demikian dengan metode numerik yang dalam hal ini Metode Elemen Hingga telah lama dikenal. Dengan metode ini, struktur pelat membran didiskritisasikan menjadi sekumpulan elemen-elemen yang gabungannya mewakili sifat struktur sebenarnya. Dengan demikian metode ini adalah suatu metode pendekatan dan perilaku struktur tersebut diwakili oleh gabungan daripada elemen-elemen tersebut. Baik buruknya modelisasi tersebut sangat bergantung kepada bagaimana kita memformulasikan elemen-elemennya.

Aplikasi teknik pertama dengan metode elemen hingga oleh Turner et al [T1] memperkenalkan elemen yang dinamakan CST (Constant Strain Triangle) yaitu elemen triangular dengan tiga buah nodal. Elemen ini adalah elemen membran triangular yang paling simpel, ekonomis dan secara luas telah dikenal dan banyak dipakai untuk memecahkan berbagai macam bentuk dan tipe struktur membran. Kesederhanaan elemen ini terlihat dari jumlah nodalnya yang sedikit (hanya diujung sudut triangular) dan hanya mempunyai dua buah d.k. (derajat kebebasan) per nodal. Dapat dipahami bila modelisasi struktur membran dengan menggunakan elemen ini membutuhkan jumlah elemen yang banyak agar perilaku struktur yang sebenarnya dapat terwakili.

Meskipun saat ini elemen tersebut dianggap kurang memiliki kecepatan konvergensi yang baik untuk menyelesaikan problem elastisitas bidang, elemen ini masih saja digunakan untuk modelisasi cangkang dengan pendekatan faset plan. Hal ini disebabkan karena tidak banyak pilihan elemen membran triangular tiga nodal yang dapat dikombinasikan dengan elemen bending triangular tiga nodal. Kesulitan tentu saja muncul pada waktu penggabungan elemen membran dan bending, yaitu tidak adanya derajat kebebasan rotasi bidang (θ_{zi}) pada setiap nodalnya. Rotasi ini disebut drilling rotations dan akan menimbulkan singularitas matrik kekakuan elemen yang mempunyai enam d.k. per nodal bilamana elemen-elemen berkumpul pada bidang datar. Untuk mengatasi hal ini biasanya digunakan kekakuan fiktif $[k_{\theta z}]$ untuk melengkapi kekurangan d.k. rotasi θ_z . Penambahan ini tidak boleh merubah energi intern per elemen. Karena itu kekakuan fiktif harus demikian kecil dan hanya seperlunya agar term diagonal nol secara numerik tidak lagi dinilai nol.

D.J. Allman [A3] memberikan alternatif baru dengan memperkenalkan elemen membran triangular tiga nodal dan tiga d.k. per nodal. Yaitu dengan d.k. ketiga merupakan Rotasi Drilling (Gbr.4.1).



Gbr.4.1. Elemen membran triangular Allman.

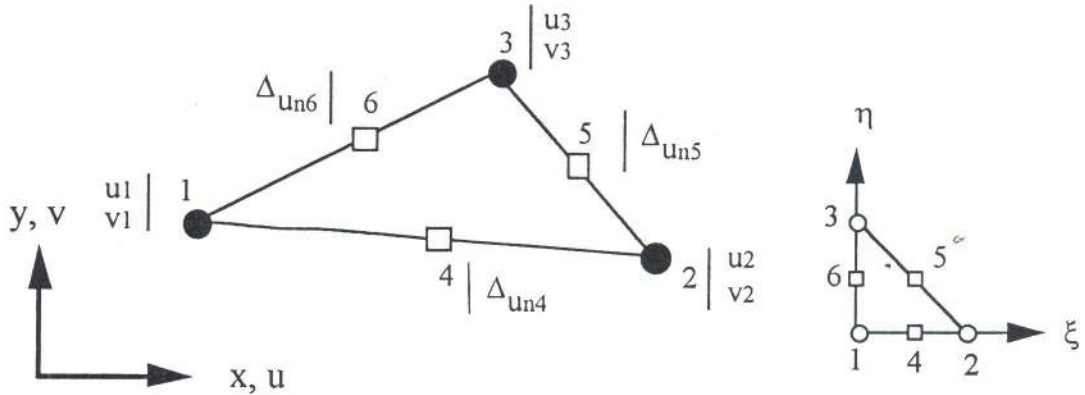
Dalam penelitian ini elemen membran Allman dipilih untuk mendampingi elemen bending DKMT dalam formulasi cangkang model faset plan. Daya tarik dari pada elemen ini adalah jumlah nodal yang hanya tiga dan penampilannya yang jauh diatas elemen CST dan performanya mendekati elemen LST (Linear Strain Triangle). Sedangkan jumlah d.k. total elemen Allman (9 d.k. total) lebih sedikit dibandingkan dengan elemen LST (12 d.k. total). Akibatnya proses perhitungan elemen Allman lebih cepat dibandingkan dengan elemen LST. Elemen LST adalah elemen triangular klasik dengan enam buah nodal (tiga buah nodal diujung sudut dan tiga buah nodal di tengah sisi elemen). Namun demikian waktu perhitungan menjadi lebih lama.

Dalam penelitian ini, penggunaan satu titik integrasi Hammer digunakan dalam menghitung matrix kekakuan elemen Allman. Masalah spurious modes yang muncul akibat pengurangan titik integrasi akan diatasi dengan teknik stabilisasi MacNeal and Harder [M2]. Sehingga pada akhirnya diperoleh elemen Allman yang simpel, efisien dan dapat diandalkan karena tidak mempunyai problema Spurious modes. Hasil kombinasi ini adalah sebuah elemen cangkang dengan 18 d.k.

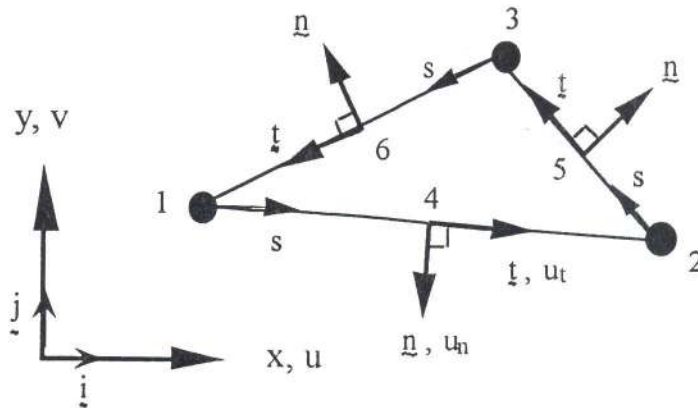
4.2 APROKSIMASI FUNGSI PERALIHAN

Aproksimasi fungsi peralihan (Gbr. 4.2) dinyatakan oleh :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,3} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=4,6} P_k \Delta u_{nk} \begin{Bmatrix} S_k \\ -C_k \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$



Gbr. 4.2 Data Kinematis - derajat kebebasan inisial .



Gbr 4.3 Sistim koordinat kartesian dan normal tangensial pada sisi elemen.

Fungsi bentuk N_i dan P_k dapat dilihat pada tabel I - bab 3.

S_k dan C_k adalah cosinus arah sisi k atau sisi $i-j$.

Δu_{nk} adalah variabel nodal pada sisi tengah $k = 4, 5, 6$ (Gbr.4.2) dan merupakan inkremental peralihan dalam arah normal sisi k .

$$t_k = C_k i + S_k j \quad ; \quad n_k = S_k i - C_k j \quad (4.2)$$

$$C_k = \frac{x_{ji}}{L_k} \quad ; \quad S_k = \frac{y_{ji}}{L_k} \quad ; \quad L_k^2 = x_{ji}^2 + y_{ji}^2 \quad ; \quad x_{ji} = x_j - x_i \quad ; \quad y_{ji} = y_j - y_i \quad (4.3)$$

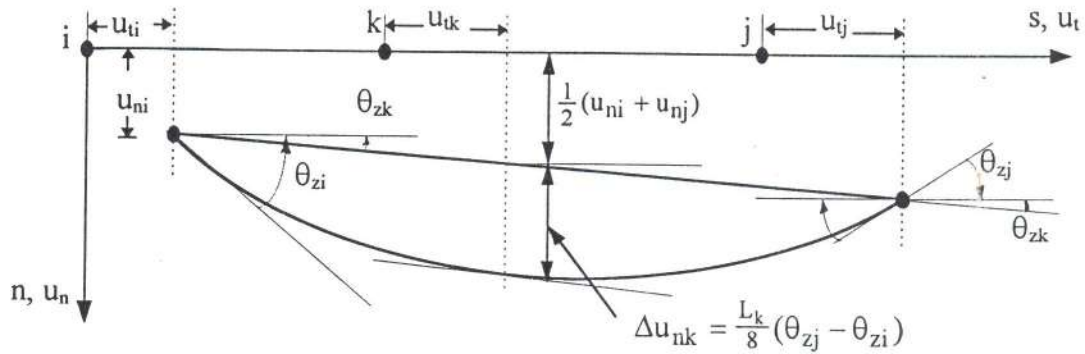
Perhatikanlah sisi i-j dari triangular pada gambar 4.2-3. Peralihan u_t adalah peralihan tangensial yang sejajar dengan sisi i-j dan diinterpolasi secara linier, sedangkan u_n peralihan dalam arah normal sisi i-j dan diinterpolasi secara kuadratik. Asumsi ini mengantar kita pada persamaan berikut ;

$$u_t(s) = u \cdot t_k = (1-s') u_{ti} + s' u_{tj} \quad ; \quad s' = \frac{s}{L_k} \quad (4.4)$$

$$u_{ti} = u_i C_k + v_i S_k \quad ; \quad u_{tj} = u_j C_k + v_j S_k$$

$$u_n(s) = u \cdot n_k = (1-s') u_{ni} + s' u_{nj} + 4 s' (1-s') \Delta u_{nk} \quad (4.5)$$

$$u_{ni} = u_i S_k - v_i C_k \quad ; \quad u_{nj} = u_j S_k - v_j C_k \quad ; \quad \Delta u_{nk} = u_{nk} - \frac{1}{2} (u_{ni} + u_{nj})$$



Gbr 4.4 Peralihan pada sisi elemen .

Derajat kebebasan pada nodal tengah setiap sisi akan dieliminasi sehingga pada akhirnya akan diperoleh elemen dengan hanya memiliki variabel nodal diketiga nodal sudutnya. Diferensiasi pertama pada persamaan (4.5) dan dengan menyatakannya pada nodal i dan j, maka akan diperoleh :

$$u_{n,s} = \frac{u_{nj} - u_{ni}}{L_k} + \frac{4}{L_k} \left(1 - 2 \frac{s}{L_k} \right) \Delta u_{nk} \quad (4.6)$$

$$\theta_{zi} = -(u_{n,s})_i = \frac{u_{nj} - u_{ni}}{L_k} + \frac{4}{L_k} \Delta u_{nk} \quad ; \quad \theta_{zj} = -(u_{n,s})_j = \frac{u_{nj} - u_{ni}}{L_k} - \frac{4}{L_k} \Delta u_{nk} \quad (4.7)$$

kita dapatkan pula ;
$$\Delta u_{nk} = \frac{L_k}{8} (\theta_{zj} - \theta_{zi}) \quad (4.8)$$

atau ;

$$\Delta u_{n4} = \frac{L_4}{8} (\theta_{z2} - \theta_{z1}) \quad ; \quad \Delta u_{n5} = \frac{L_5}{8} (\theta_{z3} - \theta_{z2}) \quad ; \quad \Delta u_{n6} = \frac{L_6}{8} (\theta_{z1} - \theta_{z3}) \quad (4.9)$$

dimana θ_{zi} and θ_{zj} adalah rotasi drilling dimana vektornya berarah normal pada bidang elemen. Dari persamaan (4.1) dan (4.9), Allman dapat membangun elemen triangular dengan matrix kekakuan berorde 9x9 (gambar 4.1), dimana :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,3} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=4,6} P_k \frac{L_k}{8} (\theta_{zj} - \theta_{zi}) \begin{Bmatrix} S_k \\ -C_k \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

4.3 VEKTOR DEFORMASI MEMBRAN

Komponen deformasi membran e_x , e_y dan e_{xy} diperoleh dari peralihan u , v dengan relasi yang biasanya ;

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B_m] \{U_n\} \quad (4.11)$$

dimana ; $\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_{z1} \quad \theta_{z2} \quad \theta_{z3} \rangle$

dan matrix $[B_m]$ adalah :

$$[B_m] = [[B_{mc}] \quad [B_{m\theta}]] \quad (4.12)$$

$$[B_{mc}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Matrix $[B_{mc}]$ diatas ini adalah sama seperti elemen CST .

Dalam penelitian ini, digunakan satu titik integrasi Hammer ($\xi = \eta = \frac{1}{3}$) dalam menghitung matrix kekakuan elemen, sehingga diperoleh :

$$[B_{m\theta}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(y_{13}^2 - y_{21}^2) & \frac{1}{6}(y_{21}^2 - y_{32}^2) & \frac{1}{6}(y_{32}^2 - y_{13}^2) \\ \frac{1}{6}(x_{13}^2 - x_{21}^2) & \frac{1}{6}(x_{21}^2 - x_{32}^2) & \frac{1}{6}(x_{32}^2 - x_{13}^2) \\ \frac{1}{3}(x_{21}y_{21} - x_{13}y_{13}) & \frac{1}{3}(x_{32}y_{32} - x_{21}y_{21}) & \frac{1}{3}(x_{13}y_{13} - x_{32}y_{32}) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.4 MATRIX KEKAKUAN ELEMEN ALLMAN

Pada akhirnya diperoleh matrix kekakuan elemen membran triangular dari Allman sebagai berikut :

$$[K_m] = \int_A [B_m]^T [H_m] [B_m] d \quad (4.15)$$

dimana $[H_m]$ matrix elastisitas. Dalam hal plane stress, material isotrop linier elastis, matrix $[H_m]$ adalah ;

$$[H_m] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

dimana E modulus Young dan ν adalah rasio Poisson.

karena matrix $[B_m]$ dan $[H_m]$ adalah matrix konstanta, maka matrix kekakuan dapat langsung dihitung tanpa integrasi numerik. Matrix kekakuan elemen membran dinyatakan oleh :

$$[K_m] = A [B_m]^T [H_m] [B_m] \quad (4.17)$$

Pada waktu penggabungan elemen membran dengan elemen bending dalam koordinat lokal, susunan variabel nodal pada matrix $[B_m]$ harus diubah sebelum transformasi matrix kekakuan ke sistim koordinat global, sebagai berikut ;

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ \theta_{z2} \ u_3 \ v_3 \ \theta_{z3} \rangle \quad (4.18)$$

Penggunaan satu titik integrasi Hammer dalam menghitung matrix $[K_m]$ akan menimbulkan defisiensi rank matrix kekakuan $[K_m]$. Seharusnya secara teoritis Rank matrix kekakuan elemen membran triangular dari Allman adalah :

$$\sum \text{rank} = \sum \text{derajat kebebasan} - \sum \text{rigid body motion} = 9 - 3 = 6.$$

Tetapi dalam hal ini terjadi defisit rank sebanyak 3 buah dan dari perhitungan hanya diperoleh rank = 3.

Untuk mengatasi ini MacNeal [M2] mengusulkan stabilisasi matrix kekakuan dengan menambahkan matrix kekakuan $[K_{\text{stab1}}]$ dan $[K_{\text{stab2}}]$ pada elemen Allman, yaitu :

$$[K_m] = [K_m] + [K_{\text{stab1}}] + [K_{\text{stab2}}] \quad (4.19)$$

dimana :

$$[K_{\text{stab1}}] = E A h 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[K_{\text{stab2}}] = E A h 10^{-6} \{R\} \langle R \rangle \quad (4.21)$$

$$\text{dan : } \langle R \rangle = \left\langle -\frac{x_{32}}{4A} \quad -\frac{y_{32}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{x_{31}}{4A} \quad \frac{y_{31}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{x_{21}}{4A} \quad -\frac{y_{21}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \right\rangle \quad (4.22)$$

$[K_{\text{stab1}}]$ adalah suatu matrix yang beroperasi dalam θ_{z1} , θ_{z2} , θ_{z3} , matrix ini mempunyai rank = 2. $[K_{\text{stab2}}]$ adalah suatu matrik kekakuan yang mempunyai rank = 1 dan beroperasi dalam variabel nodal ; u_1 , v_1 , θ_{z1} , u_2 , v_2 , θ_{z2} , u_3 , v_3 , θ_{z3} . Penambahan kedua matrix ini terhadap $[K_m]$ akan menghilangkan defisit rank dan sekaligus meniadakan spurious modes. Walaupun demikian, penambahan $[K_{\text{stab1}}]$ dan $[K_{\text{stab2}}]$ tidak boleh mengubah besaran energi membran, karenanya koef 10^{-6} diberikan terhadap matrix kekakuan stabilisasi.

Keuntungan menyertakan d.k. rotasi drilling pada elemen membran adalah karena umumnya program elemen hingga mempunyai 6 d.k. per nodal. Sehingga kita tidak perlu menambahkan kekakuan fiktif seperti yang sebelumnya dilakukan pada elemen CST. Selain itu elemen Allman lebih performa dibandingkan dengan elemen CST. Sehingga bila kita menggabungkannya dengan elemen triangular bending yang juga hanya memiliki d.k. pada nodal sudut maka, dapat kita harapkan kombinasi ini akan lebih kompeten dibandingkan dengan CST. Menyertakan rotasi normal juga akan menghindari kita dari kondisi singularitas matrix kekakuan (term zero pada diagonal matrix kekakuan) bilamana gabungan elemen mendekati bidang datar. Keuntungan lainnya bila kita menggunakan elemen yang hanya memiliki variabel nodal pada hanya nodal sudut adalah kemudahan dalam preparasi mesh dan efisiensi komputasi.

BAB V

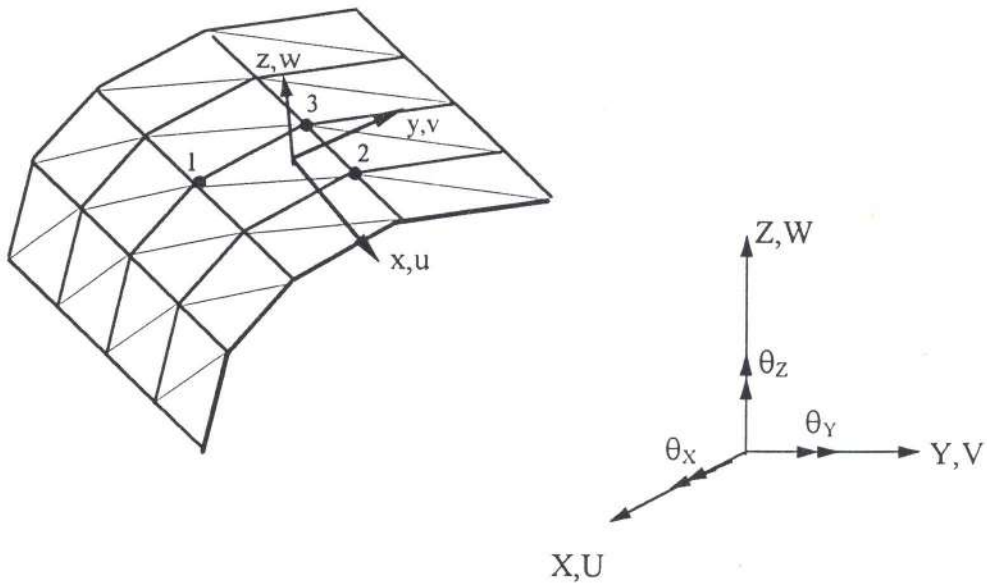
FORMULASI ELEMEN CANGKANG FASET TRIANGULAR DKMT18FS

5.1. UMUM

Pendekatan elemen cangkang faset (Facetted Shell Element) sering digunakan dalam mendiskritisasi struktur cangkang. Geometri suatu cangkang bentuk sembarang selalu dapat direpresentasikan sebagai gabungan dari elemen cangkang faset triangular 3 nodal (Gambar 5.1). Pendekatan ini sangat sering digunakan dalam memodelisasi struktur cangkang dan terdapat pada banyak program metode elemen hingga. Elemen cangkang faset diperoleh dengan mengkombinasikan elemen membran dan bending. Gabungan efek membran dan bending direalisasi pada tahap penggabungan sebagai transformasi variabel nodal dalam reper global (peralihan dan rotasi). Pada model pendekatan ini kopling membran bending tidak diperhitungkan dan terdapat diskontinuitas normal antar pertemuan elemen.

Elemen cangkang faset adalah elemen cangkang dimana peralihannya didasarkan pada representasi kartesian dan solusi yang diperoleh dengan model ini, konvergensinya akan menuju solusi teori (eksak) apabila jumlah elemen diperbanyak.

Dalam bab ini akan diperkenalkan secara mendetail sebuah elemen yang dinamakan DKMT18FS, dimana bagian membrannya direpresentasikan oleh elemen Allman dan unsur bending oleh elemen DKMT. Variabel nodal setelah penggabungan adalah peralihan U , V , W dan rotasi θ_x , θ_y , θ_z yang mengelilingi sumbu global X , Y dan Z . (Gambar 5.1)



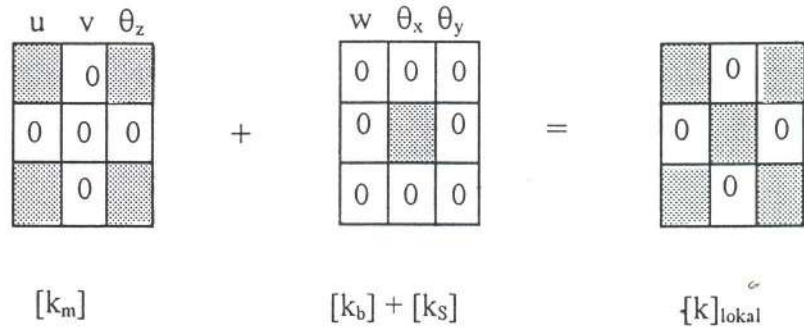
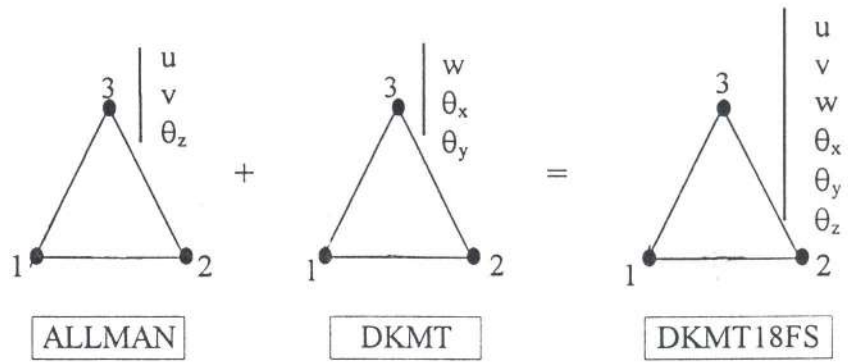
Gbr. 5.1.

Cangkang dimodelisasi dengan sekumpulan elemen cangkang faset

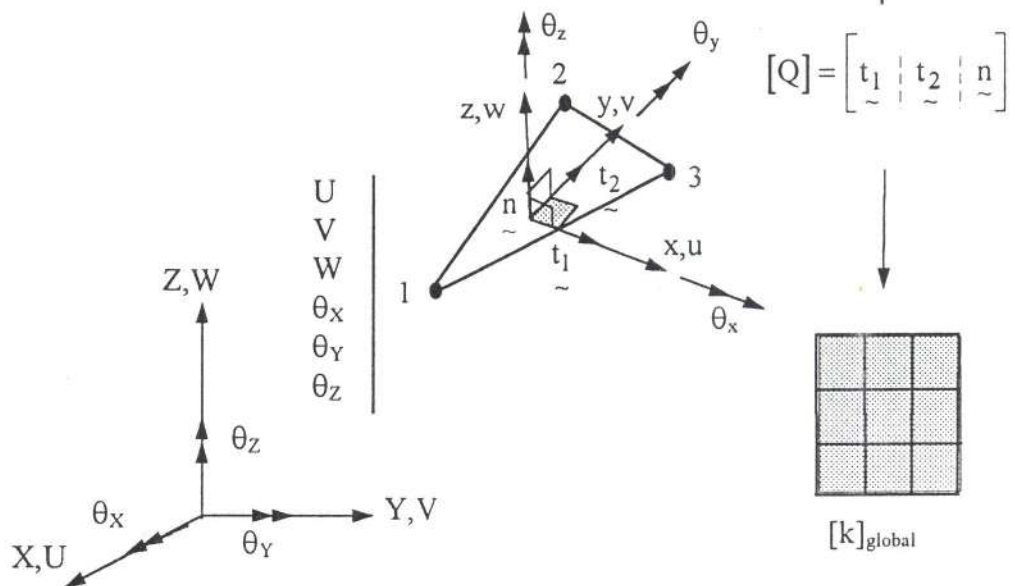
5.2 MATRIX KEKAKUAN ELEMEN

Matrix kekakuan elemen cangkang faset DKMT18FS dibentuk dari gabungan matriks kekakuan membran dan bending dalam sistim koordinat lokal. Elemen membran yang dimaksud adalah elemen Allman triangular 3 nodal dengan derajat kebebasan per nodal u , v dan θ_z dalam sistim koordinat lokal. Sedangkan elemen triangular bending dipilih elemen DKMT triangular 3 nodal yang memiliki derajat kebebasan w , θ_x dan θ_y dalam sistim koordinat lokal.

Matrix kekakuan elemen bending DKMT telah dibahas pada bab III, sedangkan matrix kekakuan elemen membran Allman juga telah dibahas pada bab IV. Kedua matriks kekakuan tersebut dibentuk pada sistim koordinat lokal, jadi sebelum disusun menjadi matriks kekakuan struktur maka matriks kekakuan elemen harus ditransformasikan ke dalam sistim koordinat global. Pada sistim koordinat lokal masalah spurious modes pada elemen membran Allman telah diatasi dengan cara yang telah dijelaskan pada Bab IV. Dengan demikian diharapkan masalah ini tidak lagi menjadi problem pada tahap penggabungan dan tahap transformasi ke sistim global.



(a) Koordinat Lokal



Matriks $[Q]^T$ adalah matriks transformasi variabel nodal (translasi/rotasi) dari sistem koordinat lokal ke sistem koordinat global

(b) Koordinat Global

Gbr. 5.2

Elemen Tipe Cangkang Faset

5.3 KOORDINAT LOKAL DAN MATRIX KOSINUS

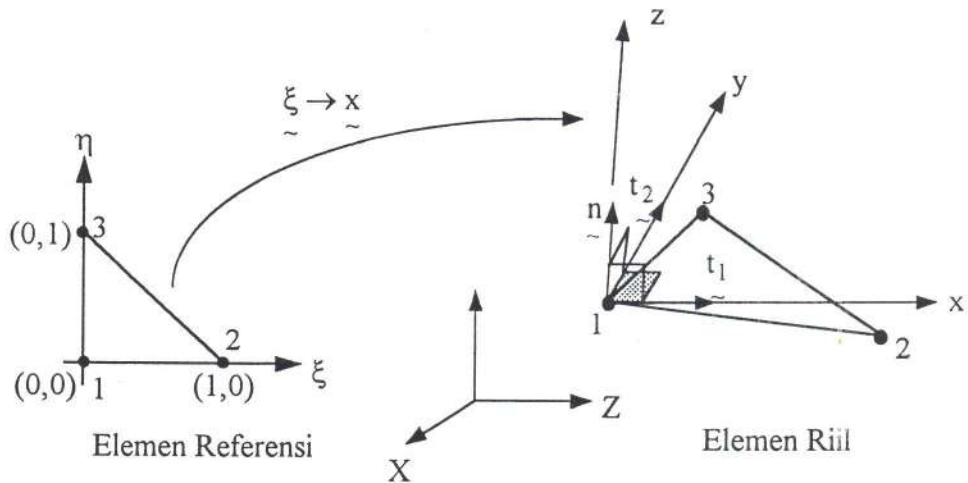
ARAH

Dalam menganalisa struktur cangkang, struktur cangkang tersebut didiskritisasi menjadi sekumpulan elemen triangular 3 nodal dimana ketiga titik nodal tersebut selalu terletak pada satu bidang datar.

Vektor posisi suatu titik p pada permukaan suatu elemen referensi dalam sistim koordinat global didefinisikan oleh :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ Z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

dimana X_i , Y_i dan Z_i adalah koordinat titik nodal elemen dalam sistim koordinat global dan N_i adalah fungsi bentuk yang telah diberikan pada tabel Bab 3.



Gbr. 5.3.
Reper lokal x, y, z

Vektor basis a_1 dan a_2 adalah :

$$\{a_1\} = \{x_{p,\xi}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix} ; \quad \{a_2\} = \{x_{p,\eta}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Dalam formulasi elemen cangkang, perlu didefinisikan suatu reper orthonormal unik $[Q]$ pada suatu titik di dalam elemen. Katakanlah titik tersebut adalah titik p .

Normal $\underline{n}$ dari setiap elemen dalam koordinat global dapat dihitung dari hasil perkalian vektor $\underline{a}_1$ dan $\underline{a}_2$. Vektor normal $\underline{n}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{\underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2|} \quad ; \quad |\underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2| = 2A \quad (5.3)$$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} (Y_{21}Z_{31}) - (Y_{31}Z_{21}) \\ (Z_{21}X_{31}) - (Z_{31}X_{21}) \\ (X_{21}Y_{31}) - (X_{31}Y_{21}) \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

$$2A = \left((Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})^2 + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})^2 + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

A adalah luas elemen segitiga yang dihitung dari koordinat nodal dalam sistim global. Demikian juga untuk $\underline{t}_1$ dan $\underline{t}_2$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{t}_1 = \underline{k} \wedge \underline{n} \quad ; \quad \underline{t}_2 = \underline{n} \wedge \underline{t}_1 \quad (5.6)$$

dimana : $\langle k \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$L_{21} = \left(X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$X_{21} = X_2 - X_1$$

$$Y_{21} = Y_2 - Y_1$$

$$Z_{21} = Z_2 - Z_1$$

Dengan mengetahui vektor $\underline{n}$, $\underline{t}_1$, $\underline{t}_2$ maka matrix transformasi [Q] dapat didefinisikan sebagai berikut [Ref. B4, hal 378] :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_2 & \underline{n} \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(n_z + \frac{n_y^2}{a} \right) & \left(-\frac{n_x n_y}{a} \right) & n_x \\ \left(-\frac{n_x n_y}{a} \right) & \left(n_z + \frac{n_x^2}{a} \right) & n_y \\ -n_x & -n_y & n_z \end{bmatrix} \quad ; \quad a = 1 + n_z \quad (5.7)$$

dimana : $a = 1 + n_z$; jika $a = 0$ ($n_x = n_y = 0$; $n_z = -1$), maka :

$$\langle t_1 \rangle = \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle ; \quad \langle t_2 \rangle = \langle 0 \ -1 \ 0 \rangle$$

dan dalam hal khusus ini $[Q]$ menjadi :

$$[Q] = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{2X} & n_X \\ t_{1Y} & t_{2Y} & n_Y \\ t_{1Z} & t_{2Z} & n_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.4. TRANSFORMASI KOORDINAT LOKAL KE KOORDINAT GLOBAL

Matrix kekakuan elemen cangkang dibentuk dalam sistim koordinat lokal (x, y dan z) sehingga sebuah matrix transformasi diperlukan untuk mentransformasikan matrix kekakuan elemen tersebut dari sistim koordinat lokal ke sistim koordinat global (X, Y dan Z).

Pada waktu input data, koordinat nodal diberikan dalam sistim koordinat global. Proses perhitungan matrix kekakuan dalam sistim koordinat lokal membutuhkan data koordinat nodal dalam sistim koordinat lokal. Matrix transformasi tersebut dapat dihitung dengan cara yang mudah..

Peralihan dan rotasi dari sebuah titik nodal pada sistim koordinat lokal dengan sistim koordinat global dihubungkan oleh sebuah matriks $[Q]^T$ sehingga memberikan :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

dimana :

$$[Q]^T = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

dimana $[Q]^T$ adalah sebuah matriks ukuran 3×3 yang menunjukkan cosinus arah sudut yang dibentuk antara dua sumbu yang ditinjau.

Untuk keseluruhan peralihan yang terjadi pada nodal-nodal dari sebuah elemen dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\{u_n\} = [T] \{u_n\}_{glob} \quad (5.11)$$

Dari hukum transformasi orthogonal [Ref. Z1, hal. 17-19], matrix kekakuan elemen dari sebuah elemen dalam koordinat global menjadi :

$$[k']_{global} = [T]^T [k]_{lokal} [T] \quad (5.12a)$$

Dalam kedua persamaan di atas $[T]$ adalah sebuah matriks diagonal dimana diagonalnya dibentuk dari matriks $[A]$ yang jumlahnya sama dengan jumlah nodal dalam satu elemen. Untuk elemen triangular 3 nodal maka :

$$[T]_{8 \times 18} = \begin{bmatrix} [A] & 0 & 0 \\ 0 & [A] & 0 \\ 0 & 0 & [A] \end{bmatrix} \quad (5.12b)$$

dimana :

$$[A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [Q]^T & 0 \\ 0 & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (5.12c)$$

Dari persamaan-persamaan di atas kita dapat mengambil kesimpulan bahwa hubungan antara koordinat global dengan kordinat lokal adalah sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (5.12d)$$

5.5 TEGANGAN DAN GAYA DALAM ELEMEN

Suatu analisa cangkang, selain menghasilkan peralihan pada titik-titik diskrit yang ditinjau, juga diharapkan memberikan hasil perhitungan tegangan dan gaya dalam pada titik-titik tersebut. Dari hasil perhitungan tahap pertama, biasanya kita dapatkan peralihan nodal dalam sistim koordinat global $\{U_n\}$. Peralihan nodal dalam sistim koordinat lokal $\{u_n\}$, dapat kita hitung dengan menggunakan persamaan 5.6 pada level elementer untuk setiap elemen. Dengan diperolehnya peralihan $\{u_n\}$, maka selanjutnya kita dapat menghitung gaya dalam, gaya membran $\{N\}$, momen bending $\{M\}$ dan gaya geser $\{T\}$ dengan persamaan berikut :

$$\{N\} = [H_m] [B_m] \{u_n\} \quad (5.13)$$

$$\{M\} = [H_b] [B_b(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (5.14)$$

$$\{T\} = [H_s] [B_s(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (5.15)$$

dimana :

$$\langle N \rangle = \langle N_x \quad N_y \quad N_{xy} \rangle \quad (5.16)$$

$$\langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle \quad (5.17)$$

$$\langle T \rangle = \langle T_x \quad T_y \rangle \quad (5.18)$$

$[H_m]$, $[H_b]$ dan $[H_s]$ sama dengan yang dinyatakan oleh persamaan (2.28), (2.29) dan (2.30). Matrix $[B_m]$ dinyatakan oleh pers.4.14 dengan urutan variabel nodal yang telah disesuaikan berdasarkan pers.4.18, matrix $[B_b(\xi, \eta)]$ dan $[B_s(\xi, \eta)]$ dinyatakan oleh pers.(3.54) dan (3.56) dengan urutan variabel nodal yang telah disesuaikan berdasarkan pers.3.57.

Besaran tegangan dapat kita hitung dari persamaan berikut :

$$\{\sigma\} = z \frac{12}{h^3} \{M\} + \frac{1}{h} \{N\} \quad (5.19)$$

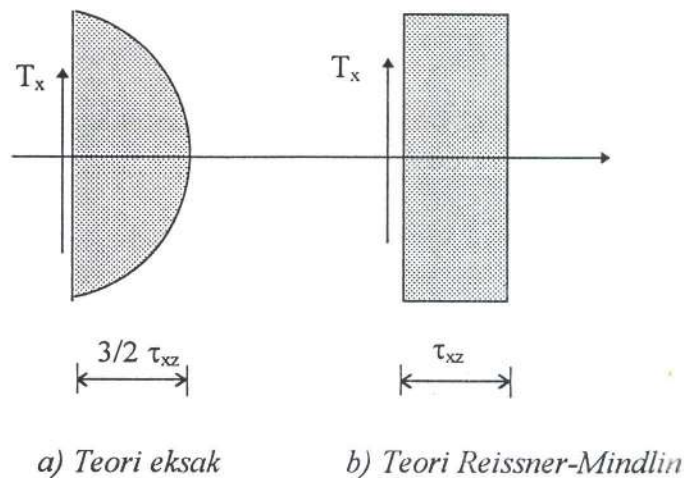
$$\{\tau\} = \frac{1}{h} \{T\} \quad (5.20)$$

dimana :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle \quad (5.21)$$

$$\langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle \quad (5.22)$$

Seperti telah dikemukakan dalam bab 2.6, bahwa energi deformasi geser memerlukan suatu faktor koreksi geser, dikarenakan besarnya tegangan GT yang diperoleh melalui persamaan 2.21 atau 5.20 adalah konstan, padahal hal ini tidaklah sesuai dengan asumsi kita terhadap pelat sebagai suatu struktur 2 dimensi. Karena dalam teori ini tegangan GT bernilai maximum di permukaan tengah pelat dan bernilai nol pada permukaan atas dan bawah. Dengan demikian secara teoritis distribusi tegangan geser adalah merupakan fungsi kuadratik dalam arah z. Oleh karena itu tegangan GT (τ_{xz} τ_{yz}) perlu dikoreksi lagi dengan faktor koreksi tegangan geser transversal Timoshenko. Besarnya koreksi tegangan geser ini besarnya adalah 3/2 (gambar 5.4) dan diperkalikan dengan harga tegangan geser transversal pada bagian tengah pelat dari hasil perhitungan numerik. Sedangkan nilai tegangan geser pada permukaan superior dan inferiornya adalah nol.



Gbr. 5.4

Distribusi tegangan geser sepanjang ketebalan pelat pada bidang y-z.

Tegangan utama (principal stress) dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\ \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Resultan Tegangan Utama dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{M_x + M_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} \\ \left(\frac{M_x + M_y}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Tegangan geser maksimum pada bidang xy adalah :

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \quad (5.25)$$

Formulasi-formulasi di atas, baik untuk tegangan maupun gaya dalam elemen adalah dalam bentuk fungsi ξ dan η . Dengan demikian untuk menghitung tegangan maupun gaya dalam pada suatu titik di dalam elemen, koordinat natural titik yang akan dihitung tersebut harus dimasukkan ke dalam persamaan di atas.

5.6 BEBAN NODAL EKIVALEN

Karena dalam proses penyelesaian sistim persamaan $[K]\{U\} = \{F\}$, elemen gaya dalam vektor gaya $\{F\}$ harus dalam bentuk beban terpusat yang bekerja pada titik diskrit elemen (nodal), maka beban-beban yang bekerja pada struktur yang akan dianalisa (khususnya beban terbagi rata), harus diubah dulu menjadi beban-beban terpusat yang bekerja pada titik diskrit elemen. Beban pusat tersebut dikenal dengan sebutan *Beban Nodal Ekivalen*.

Formulasi dari beban nodal ekivalen akibat beban terbagi rata adalah berdasarkan persamaan :

$$\{F_{zi}\} = f_z \int_A N_i \, dA \quad (5.26)$$

dengan :

$$\{F_{zi}\} = \text{Gaya nodal ekivalen}$$

$$f_z = \text{beban terbagi rata}$$

$$N_i = \text{fungsi bentuk}$$

Energi luar Π_{ext} yang dinyatakan dengan gaya nodal ekivalen ini adalah :

$$\Pi_{\text{ext}} = \int_{A^e} f_z w \, dA = \langle u_n \rangle \{F_n\} \quad (5.27)$$

dimana untuk elemen cangkang faset triangular DKMT18FS :

$$\langle F_n \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad F_{z1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 : \dots : 0 \quad 0 \quad F_{z3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \quad (5.28)$$

dan : $F_{z1} = F_{z2} = F_{z3} = A f_z / 3$

BAB VI

UJI GERAKAN BENDA KAKU

6.1. TUJUAN PENGUJIAN

Dalam bab VI dan VII, dipresentasikan beberapa uji numerik yang untuk memeriksa karakteristik konvergensi dan ketepatan dari formulasi elemen DKMT18FS. Berbagai test cangkang yang sederhana di mana kelengkungan ganda biasa digunakan oleh kebanyakan kalangan peneliti untuk menguji kebenaran formulasi suatu elemen.

Target dari pengujian ini adalah untuk menunjukkan kecepatan konvergensi dan perbandingan jumlah elemen dalam struktur cangkang tersebut.

Bentuk-bentuk cangkang dapat dibagi menjadi bentuk setengah bola (Hemispherical Shells), bentuk silinder (Cylindrical Shell Roofs), bentuk pipa (Circular Cylindrical Shells), bentuk parabol-hiperbola (Paraboloid-Hyperboloid Shells) dan bentuk Helicoidales. Sehingga struktur cangkang terbentuk dari kelengkungan yang nol, positif atau negatif. Struktur-struktur tersebut diberi beban terbagi rata atau beban terpusat dengan kondisi batas yang bervariasi (jepit, sisi bebas). Bentuk-bentuk pengujian tersebut (uji Benchmark atau Benchmark Test) merupakan uji standar keandalan elemen cangkang yang dirangkum oleh R.J. MacNeal dan R.L. Harder [Ref. M4, hal. 3-20].

6.2. PENGUJIAN KEABSAHAN ELEMEN

6.2.1. UJI RANG

Secara teoritis terdapat 6 Gerakan Benda Kaku (komponen-komponen vektor translasi $\underline{u}^T$ dan vektor rotasi $\underline{\theta}^R$). Pada elemen cangkang DKMT18FS dengan 6 derajat kebebasan pernodal, tidak memiliki Spurious Mode. Ini dibuktikan dari test eigen value.

Catatan :

Pada test eigen value diperoleh 6 nilai eigen yang nol, ini berarti tidak mempunyai Spurious Modes.

6.2.2. PERGERAKAN BENDA KAKU (RIGID BODY MOTION)

Sebuah struktur kontinu solid yang sederhana memiliki 6 gerakan benda kaku yakni 3 komponen vektor translasi ($\underline{u}^T$) dan 3 komponen vektor rotasi ($\underline{\theta}^R$). Gerakan benda kaku direpresentasikan dengan benar jika deformasinya nol dan energi intern deformasinya (Π_{int}^e) adalah nol.

Jika variabel nodal elemennya pernodal adalah:

$$\langle u_n \rangle_i = \langle U \quad V \quad W \quad \theta_X \quad \theta_Y \quad \theta_Z \rangle_i$$

maka vektor $\langle u_n \rangle_i$ untuk Translation Modes $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ adalah [Ref. B4, hal. 440]

$$\underline{u}^T = \underline{i} : \langle u_n \rangle_i = \langle 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\underline{u}^T = \underline{j} : \langle u_n \rangle_i = \langle 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \quad (6.1)$$

$$\underline{u}^T = \underline{k} : \langle u_n \rangle_i = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

Sedangkan vektor $\langle u_n \rangle_i$ untuk Rotation Modes $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ adalah [Ref. B4, hal. 440]:

$$\underline{\theta}^R = \underline{i} : \langle u_n \rangle_i = \langle 0 \quad -Z_i \quad Y_i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\underline{\theta}^R = \underline{j} : \langle u_n \rangle_i = \langle Z_i \quad 0 \quad -X_i \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rangle \quad (6.2)$$

$$\underline{\theta}^R = \underline{k} : \langle u_n \rangle_i = \langle -Y_i \quad X_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rangle$$

6.2.2.1. Uji pada Sebuah Elemen

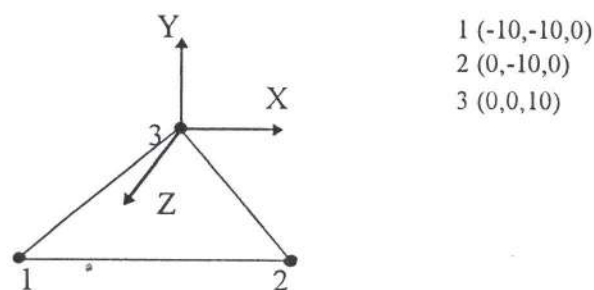
Untuk membuktikan bahwa sebuah elemen dapat menghasilkan keadaan deformasi nol sehubungan dengan gerakan benda kaku, maka kita dapat menyelesaikan suatu persoalan linier:

$$[k] \{u_n^R\} = \{0\} \quad (6.3)$$

di mana $\{u_n^R\}$ mengandung komponen yang nilainya merupakan definisi gerakan benda kaku, seperti yang telah disebutkan pada persamaan 6.1. Pada beberapa nodal, nilai kondisi batas diberikan, sedangkan pada nodal lainnya dibebaskan. Hasil perhitungan pada nodal yang dibebaskan harus sesuai dengan persamaan 6.1. Suatu gerakan benda kaku dinyatakan telah direpresentasikan dengan baik oleh sebuah elemen, bila persamaan 6.3 dipenuhi dengan baik.

Berikut ini disajikan satu buah contoh pengujian. Pengujian tersebut dilakukan terhadap sebuah elemen pada bidang tiga dimensi. Dua dari tiga nodal, yakni nodal 1, dan 2, diberi kondisi batas dan diberikan lendutan sesuai persamaan 6.1, satu-persatu dan secara bersamaan. Uji gerakan benda kaku terpenuhi jika nodal yang dibebaskan mengikuti lendutan yang diberikan.

Hasil numerik pada nodal 3 menunjukkan hasil yang baik pada Translation Modes.



Gbr. 6.1 Uji pada Sebuah Elemen

Modes	U	V	W	θ_x	θ_y	θ_z
U	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
V	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
W	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
UVW	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

Tabel 6.1 Hasil Numerik Uji pada Sebuah Elemen

6.2.2.2 Uji pada Beberapa Elemen

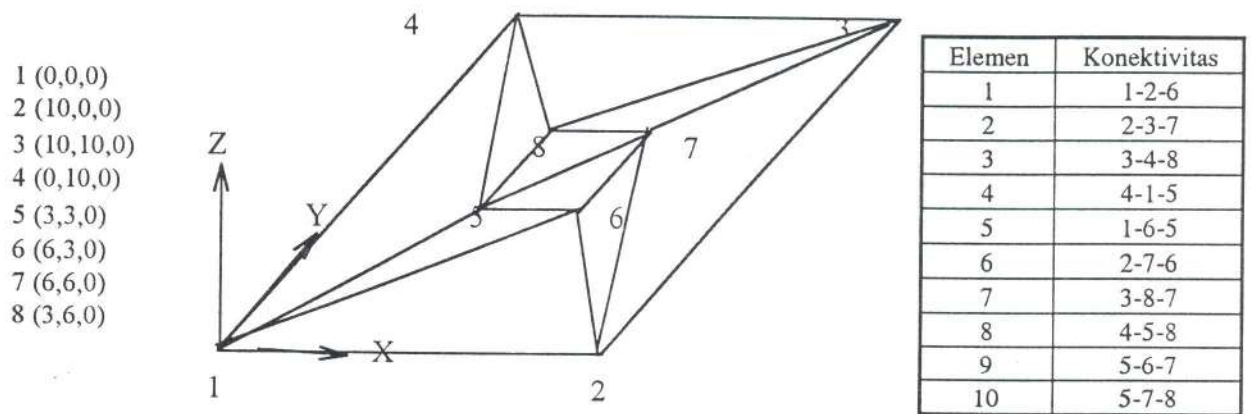
Untuk membuktikan hasil yang baik dari uji gerakan benda kaku, dapat pula dilakukan pengujian terhadap gabungan beberapa elemen dengan minimal sebuah nodal di dalam domain dengan melakukan uji sebagai berikut:

1. Kondisi batas pada variabel nodal diberikan sesuai dengan persamaan 6.1 dan 6.2 untuk nodal 1, 2, 3 dan 4.
2. Setelah penggabungan matriks elementer, langkah selanjutnya adalah proses penyelesaian persamaan 6.3. Hasil perhitungan pada nodal 5, 6, 7 dan 8 harus sesuai dengan persamaan 6.1 dan 6.2 dan deformasi harus nol pada semua titik. Jika proses perhitungan tidak dapat dilakukan, berarti terdapat Spurious Mode sebelum dan sesudah penggabungan elemen-elemen.

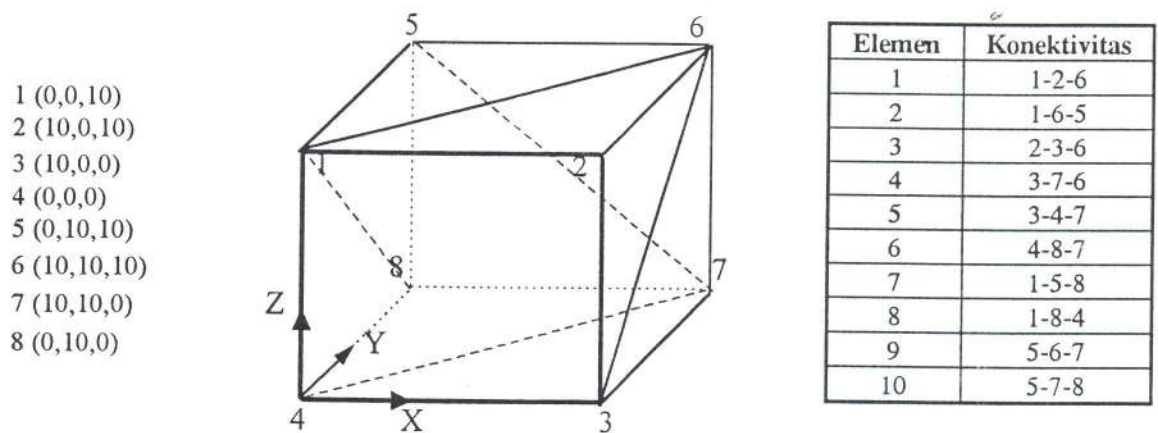
Pengujian ini disajikan dalam tiga buah contoh. Pengujian tersebut dilakukan terhadap sepuluh elemen. Pada contoh pertama, sepuluh elemen tersebut berada pada sebuah bidang datar. Pada contoh kedua, elemen-elemen tersebut tidak lagi berada pada sebuah bidang datar, namun keempat nodal dari masing-masing elemen terletak pada bidang datar. Pada contoh ketiga, masing-masing elemen tidak terletak pada bidang datar dan keempat nodal dari setiap elemen juga tidak terletak pada bidang datar.

Nodal 1, 2, 3 dan 4 diberi kondisi batas, dan lendutan menurut persamaan 6.1 dan 6.2, satu-persatu dan secara bersamaan. Sedangkan nodal-nodal lainnya dibebaskan. Hasil pengujian harus menunjukkan lendutan pada nodal-nodal yang dibebaskan sesuai dengan persamaan 6.1 dan 6.2.

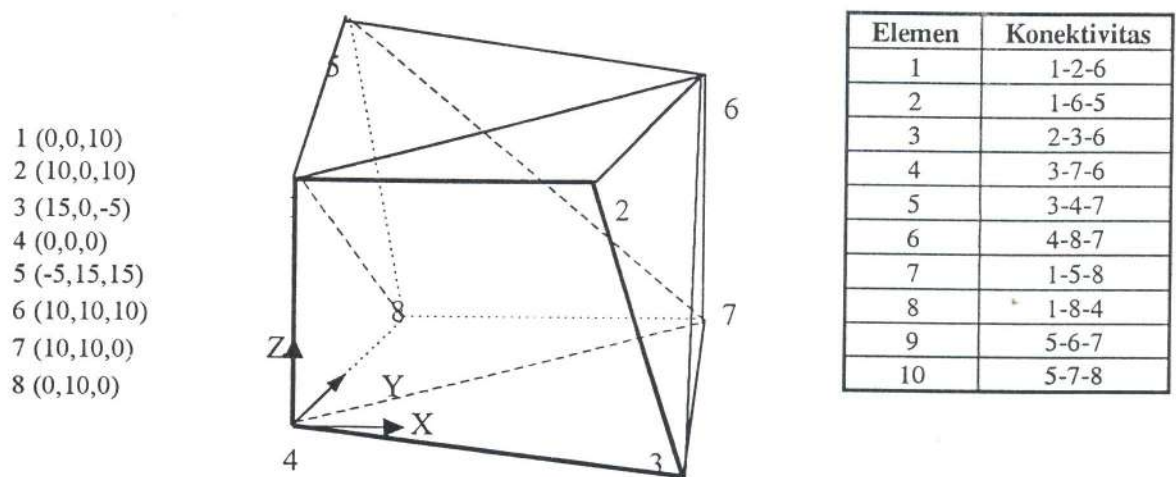
Pengujian menunjukkan hasil yang baik untuk semua Modes, dan pada semua kasus.



(a) Kesepuluh Elemen Terletak pada Sebuah Bidang Datar



(b) Kesepuluh Elemen Datar dan Terletak pada Sebuah Ruang Tiga Dimensi



(b) Kesepuluh Elemen Datar dan Terletak pada Sebuah Ruang Tiga Dimensi

Gbr. 6.2. Uji Pada Beberapa Elemen

Modes	Nodal	U	V	W	θ_x	θ_y	θ_z
U	5	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
V	5	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
W	5	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
θ_x	5	0.00	0.00	3.00	1.00	0.00	0.00
	6	0.00	0.00	3.00	1.00	0.00	0.00
	7	0.00	0.00	6.00	1.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	6.00	1.00	0.00	0.00
θ_y	5	0.00	0.00	-3.00	0.00	1.00	0.00
	6	0.00	0.00	-6.00	0.00	1.00	0.00
	7	0.00	0.00	-6.00	0.00	1.00	0.00
	8	0.00	0.00	-3.00	0.00	1.00	0.00
θ_z	5	-3.00	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	6	-3.00	6.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	7	-6.00	6.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	8	-6.00	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00
UVW	5	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
$\theta_x\theta_y\theta_z$	5	-3.00	3.00	0.00	1.00	1.00	1.00
	6	-3.00	6.00	-3.00	1.00	1.00	1.00
	7	-6.00	6.00	0.00	1.00	1.00	1.00
	8	-6.00	3.00	3.00	1.00	1.00	1.00

Tabel 6.2

Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Pertama
 untuk nodal 5(3,3,0), nodal 6(6,3,0), nodal 7(6,6,0) dan nodal 8(3,6,0)

Modes	Nodal	U	V	W	θ_x	θ_y	θ_z
U	5	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
V	5	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
W	5	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
θ_x	5	0.00	-10.00	10.00	1.00	0.00	0.00
	6	0.00	-10.00	10.00	1.00	0.00	0.00
	7	0.00	0.00	10.00	1.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	10.00	1.00	0.00	0.00
θ_y	5	10.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	6	10.00	0.00	-10.00	0.00	1.00	0.00
	7	0.00	0.00	-10.00	0.00	1.00	0.00
	8	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
θ_z	5	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	6	-10.00	10.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	7	-10.00	10.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	8	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
UVW	5	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
$\theta_x\theta_y\theta_z$	5	0.00	-10.00	10.00	1.00	1.00	1.00
	6	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00
	7	-10.00	10.00	0.00	1.00	1.00	1.00
	8	-10.00	0.00	10.00	1.00	1.00	1.00

Tabel 6.3

Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Kedua
 untuk nodal 5(0,10,10), nodal 6(10,10,10), nodal 7(10,10,0) dan nodal 8(0,10,0)

Modes	Nodal	U	V	W	θ_x	θ_y	θ_z
U	5	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
V	5	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
W	5	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
θ_x	5	-0.04	-14.35	14.24	0.90	-0.10	-0.06
	6	-0.04	-10.19	10.00	1.04	0.02	0.00
	7	-0.12	0.23	9.65	1.00	-0.03	0.05
	8	-0.10	-0.54	9.83	0.97	0.10	0.06
θ_y	5	14.59	0.00	4.59	0.00	0.88	0.00
	6	10.21	-0.12	-9.33	0.11	0.93	-0.04
	7	0.13	0.00	-9.87	-0.04	1.12	0.04
	8	0.67	0.12	0.21	0.04	0.93	-0.11
θ_z	5	-14.24	-4.35	0.04	-0.06	0.10	0.89
	6	-9.83	9.46	0.10	0.06	-0.10	0.97
	7	-9.65	10.23	0.12	0.05	0.03	1.00
	8	-10.00	-0.18	0.04	0.00	-0.02	1.04
UVW	5	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	6	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	7	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	8	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
$\theta_x\theta_y\theta_z$	5	0.30	-18.70	18.87	0.82	0.88	0.84
	6	0.33	-0.85	0.78	1.22	0.85	0.92
	7	-9.64	10.46	-0.10	1.01	1.12	1.10
	8	-9.44	-0.60	10.09	1.01	1.01	0.99

Tabel 6.4

Hasil Numerik untuk Uji pada Beberapa Elemen, Contoh Ketiga
 untuk nodal 5(-5,15,15), nodal 6(10,10,10), nodal 7(10,10,0) dan nodal 8(0,10,0)

BAB VII

UJI KONVERGENSI

7.1 Uji Konvergensi

Beberapa di antara uji konvergensi yang diperkenalkan di sini merupakan Uji Benchmark (Benchmark Test) yang disarankan oleh R.J. MacNeal dan R.L. Harder [Ref. M4, hal. 3-20], antara lain:

1. Bentuk Setengah Bola (Spherical Domes)
2. Panel Silinder (Cylindrical Shell Roofs)
3. Pipa Silinder (Circular Cylindrical Shells)
4. Bentuk Helicoidales atau Twisted Beam.

Dengan menganggap cangkang yang dianalisa adalah dengan ketebalan konstan dan kondisi batas yang diketahui serta tidak ada deformasi awal, maka dapat digunakan elemen-elemen segitiga sebagai pembanding, yakni:

1. **DKT18FS** (Diskrit Kirchhoff) adalah sebuah elemen 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, tipe pendekatan bidang datar (Facet Plane), merupakan gabungan elemen membran CST dan elemen lentur DKT [Ref. B7]. Menggunakan 3 titik integrasi Hammer.
2. **DST-BL18FS** adalah sebuah elemen 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan pernodal, tipe pendekatan bidang datar (Facet Plane), merupakan gabungan elemen membran CST dan elemen lentur DST-BL [Ref. B5 dan Ref. L2]. Menggunakan 3 titik integrasi Hammer.
3. **DST-BK18FS** adalah sebuah elemen 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, tipe pendekatan bidang datar (Facet Plane), merupakan gabungan elemen membran CST dan elemen lentur DST-BK [Ref. B6]. Menggunakan 3 titik integrasi Hammer.

4. **DST-BK18** adalah sebuah elemen 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, tipe pendekatan Degenerasi Tiga Dimensi dan dengan kontinuitas normal antar elemen yang dipertahankan. [Ref. K3, bab 7]. Menggunakan 3 titik integrasi Hammer.
5. **DST-BL18** diformulasi seperti DST-BK18, namun bagian lenturnya didekati dengan fungsi kwadratik P_k yang merupakan fungsi yang kompatibel dengan DST-BL [Ref. B5 dan Ref. L2].
6. **DKT-CST** [Ref. C5] adalah elemen datar (flat element) 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal. Merupakan superposisi dari pelat lentur DKT dan elemen tegangan bidang CST. Transformasi antara derajat kebebasan lokal dan global diterapkan pada elemen ini.
7. **DKT-CST*** [Ref. C5] adalah elemen lengkung 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, hasil superposisi elemen lentur DKT dan elemen membran yang dikembangkan dalam bagian ke dua dari referensi [Ref. C5, hal. 1645-1653]. Transformasi antara derajat kebebasan lokal dan global juga diterapkan pada elemen ini.
8. **DKT-LR** adalah elemen datar (flat element) 3 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal. Merupakan hasil superposisi elemen lentur DKT dan elemen membran tegangan bidang LR [Ref. C1]. Elemen membran ini adalah elemen yang diformulasikan oleh D.J. Allman [Ref. A1], tetapi apa yang dikembangkan dalam referensi [Ref. C1] memberikan hasil yang lebih baik.
9. **DKT-CST-15** adalah elemen datar (flat element) 3 nodal dengan 5 derajat kebebasan per nodal. Elemen ini tidak memiliki derajat kebebasan Drilling Rotation. Oleh karena itu elemen ini hanya memiliki 15 derajat kebebasan total. [Ref. C5]
10. **DKT-CST-15RB** adalah elemen datar (flat element) 3 nodal dengan 5 derajat kebebasan per nodal. Elemen ini menggabungkan derajat kebebasan lokal dan global, seperti yang telah diulas pada bagian ke tiga dari referensi [Ref. C5, hal. 1653-1655].

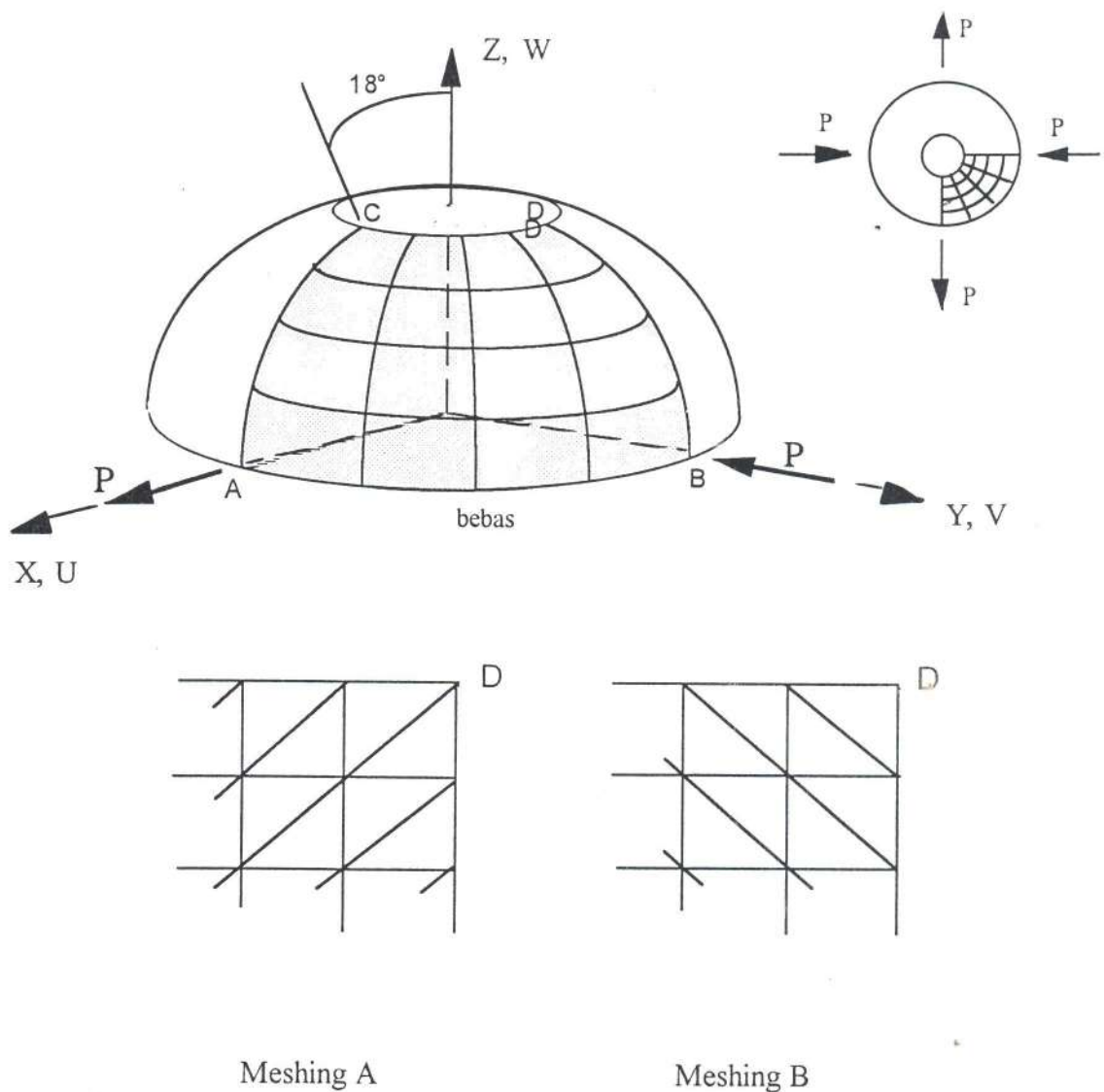
Sedangkan elemen quadrilateral adalah:

1. **DKQ24FS** (Diskrit Kirchhoff) adalah sebuah elemen 4 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, tipe pendekatan bidang datar (Facet Plane), merupakan gabungan elemen membran klasik Q4 dan elemen lentur DKQ [Ref. B8]. Menggunakan 2 titik integrasi Gauss untuk masing-masing sumbu ξ dan η .
2. **DKMQ24** (Discrete Kirchhoff Mindlin Quadrilateral 24) adalah elemen cangkang empat nodal dengan masing-masing enam derajat kebebasan pada setiap nodal. Teori Reissner-Mindlin-Naghdi dan Teknik Diskrit dari Fungsional Modifikasi Hu-Washizu yang diterapkan memungkinkan penggabungan antara Hipotesa Kirchhoff-Love dan Hipotesa Reissner-Mindlin-Naghdi. Berlaku Hipotesa Kirchhoff-Love (deformasi geser lintang diabaikan) apabila digunakan pada struktur tipis dan berlaku Teori Reissner-Mindlin-Naghdi (deformasi geser lintang diperhitungkan) apabila digunakan pada struktur tebal.
3. **DKQ24** (Diskrit Kirchhoff) [Ref. K3] adalah sebuah elemen 4 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal, tipe pendekatan Degenerasi Tiga Dimensi, merupakan gabungan elemen membran klasik Q4 dan elemen lentur DKQ [Ref. B8]. Menggunakan 2 titik integrasi Gauss untuk masing-masing sumbu ξ dan η .
4. **JET** [Ref. J1] adalah sebuah elemen 4 nodal dengan 6 derajat kebebasan per nodal. Merupakan gabungan dari elemen lentur DKQ [Ref. B8] dan elemen membran 3 derajat kebebasan per nodal (u, v, ω atau u, v, Ω).
5. **HYBRID** [Ref. K4] adalah sebuah elemen 4 nodal dengan 5 derajat kebebasan per nodal. Elemen ini dikembangkan berdasarkan Prinsip Hellinger-Reissner yang dimodifikasi untuk kondisi Relaxed Element Compatibility. Elemen ini juga berdasarkan teori cangkang tipis dengan Hipotesa Love-Kirchhoff.

6. MORRIS-24 dan MORRIS-48 [Ref. M3].

Catatan: Kami tidak dapat mengevaluasi elemen DKMT18FS untuk mesh yang sangat besar. Hal ini dikarenakan keterbatasan PCFEAP[®] versi 2.02.

7.2 Bentuk Setengah Bola (Spherical Domes)



Gbr. 7.1 Bentuk Setengah Bola (Spherical Domes)

Data:

$$R = 10 \text{ m}; h = 0.04 \text{ m}; R/h = 250$$

$$P = 2 \text{ N}; E = 6.825 \times 10^7 \text{ Pa}; \nu = 0.3$$

Kondisi simetris:

$$V = \theta_x = \theta_z \text{ pada sisi AC;}$$

$$U = \theta_y = \theta_z \text{ pada sisi BD}$$

Kondisi batas:

$$W = 0 \text{ pada titik B}$$

Nilai referensi:

$$U_A = -V_B = 0,094 \text{ m}$$

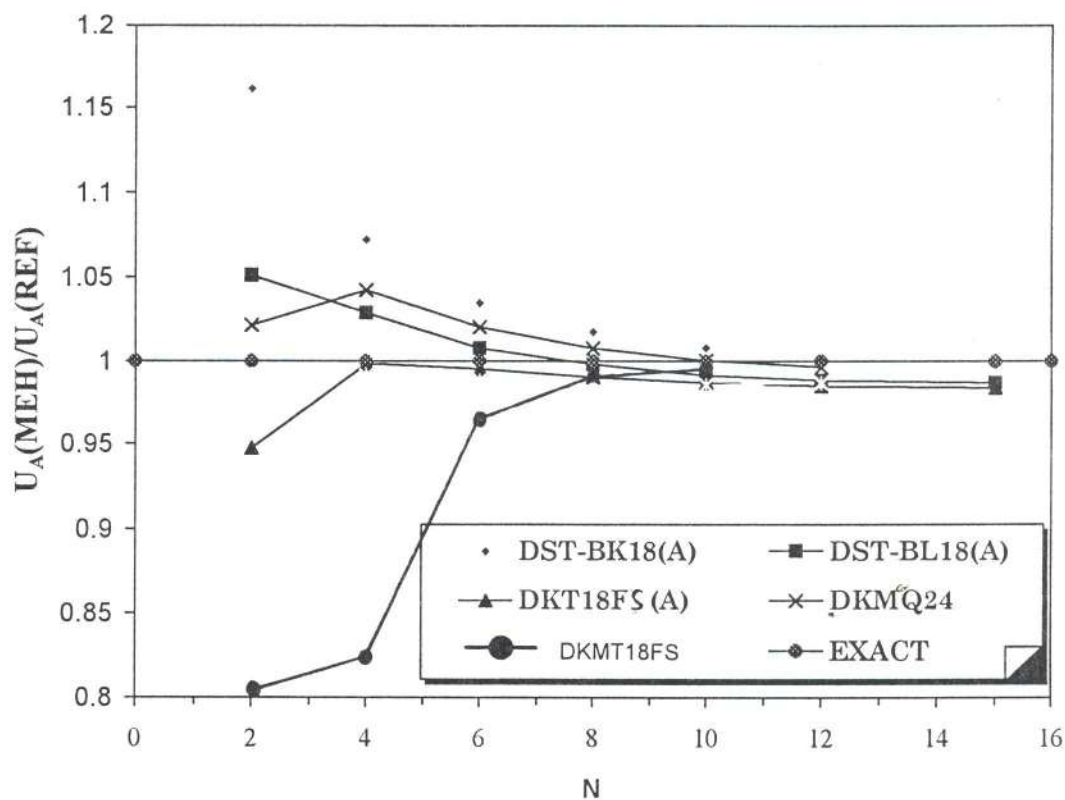
Sebuah kasus yang sering digunakan untuk mengevaluasi performa suatu elemen cangkang berbentuk setengah bola yang tipis ($R/h = 250$) dengan kondisi batas bebas dan 4 buah beban terpusat.

Kasus ini diperkenalkan untuk membuktikan tidak adanya Membrane Locking dan gerakan benda kaku yang baik. Struktur dibagi menjadi empat bagian karena simetri.

Lendutan $U_A = -V_B$ yang merupakan hasil uji numerik dipresentasikan pada tabel 7.1 dan gambar 7.2.

Sebagai pembandingan digunakan elemen DKMQ24, DKT18FS, DST-BL18 dan DST-BK18 dengan jumlah elemen (N): 2, 4, 6, 8, 10, 12 dan 15. Untuk elemen segitiga ada 2 macam meshing yakni model A dan B.

Nilai referensi perhitungan berdasarkan teori klasik yang digunakan [Ref. M4] adalah $U_A = 0.094 \text{ m}$. Sebagai catatan, elemen DST-BK18, DKMQ24 dan DKMT18FS memberikan hasil yang baik; konvergen menuju nilai referensi. Sedangkan elemen DST-BL18, dalam kasus ini, identik dengan elemen DKT18FS; konvergen menuju satu nilai; 0.0925 m. Penyelesaian kasus setengah bola tanpa lubang, dengan mempertimbangkan Seri Ganda Trigonometri (Double Series Trigonometric) dari metode Raleigh-Ritz menghasilkan nilai 0.0925 m. Gambar deformasinya dapat dilihat pada gambar 7.3.

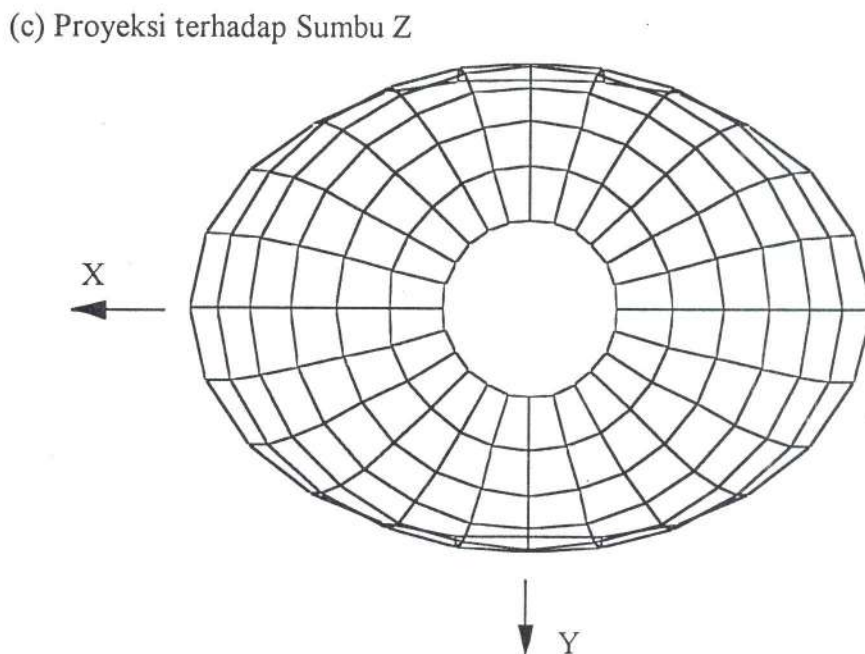
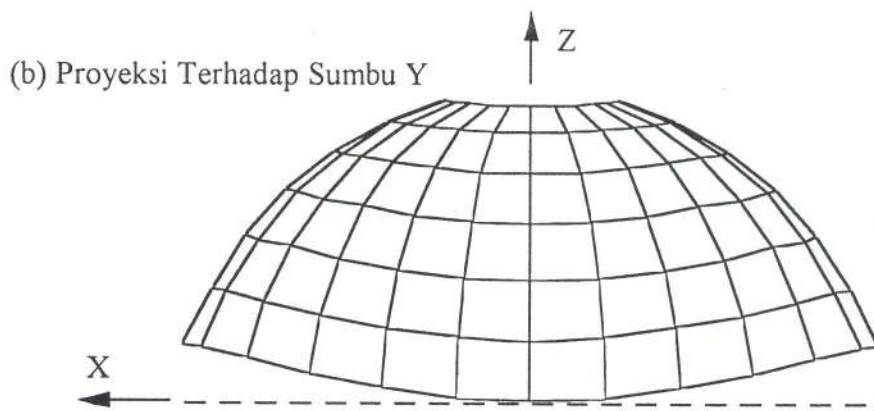
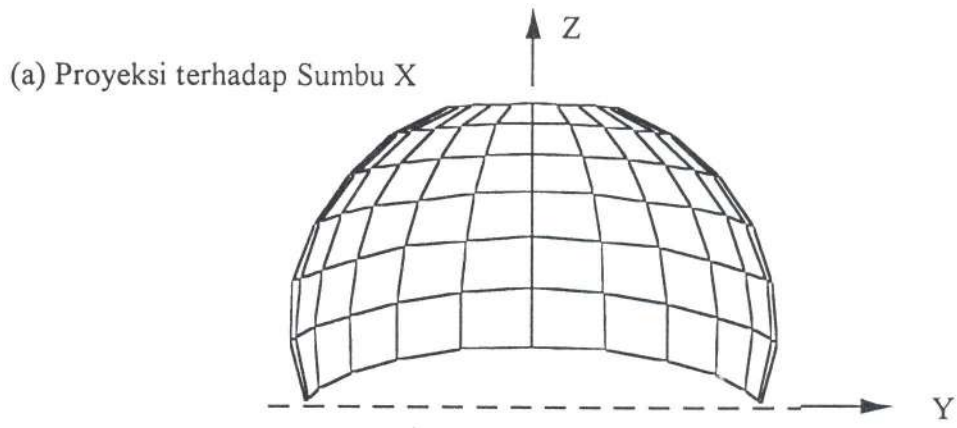


Gbr. 7.2 Konvergensi Lendutan U_A - Bentuk Setengah Bola

Tabel 7.1: Lendutan U_A dan V_B

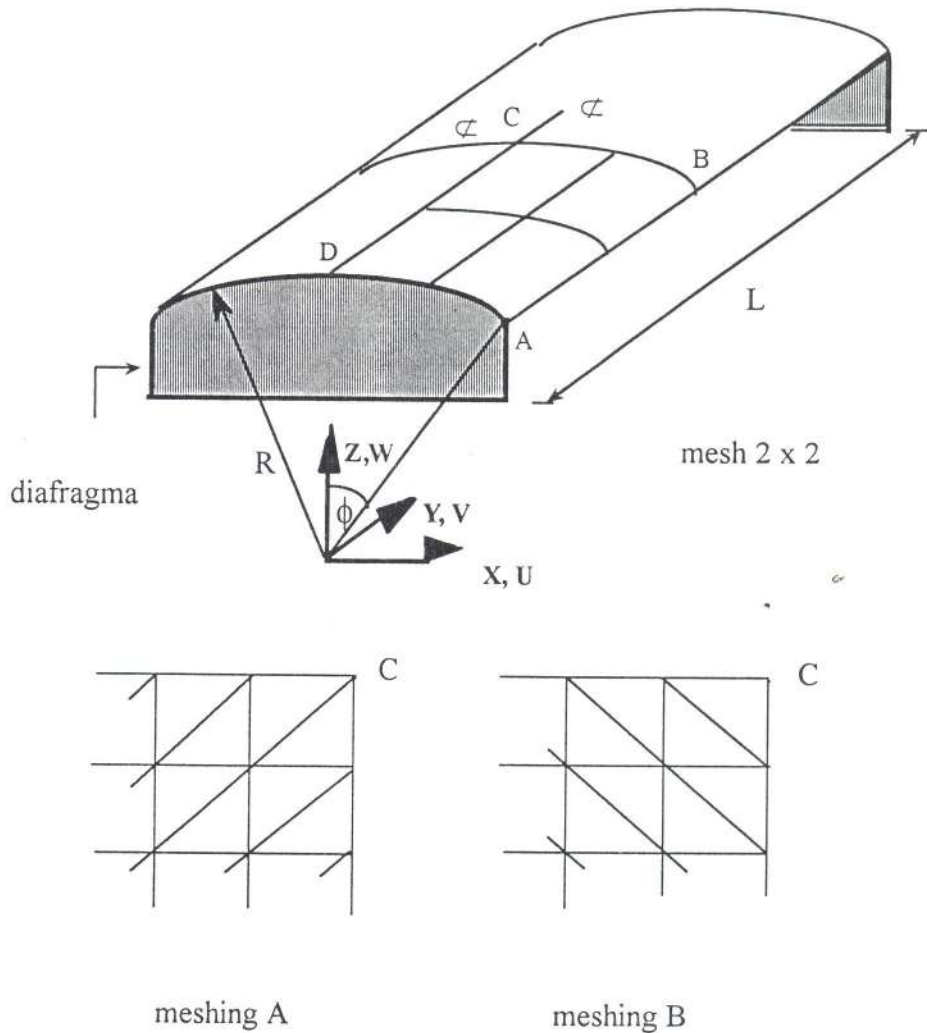
Nilai referensi: $\underline{U}_A = U_A \times 10^3 = 94$ dan $\underline{V}_B = V_B \times 10^3 = -94$

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	109.2/109.1	98.8/103.1	89.1/92.8	96.04	64.4/71.9
4	A/B	100.8/100.3	96.7/99.4	93.9/96.5	97.95	74.9/79.3
6	A/B	97.3/96.9	94.7/96.3	93.6/95.1	95.95	89.0/90.9
8	A/B	95.7/95.3	93.8/94.8	93.1/94.2	94.72	92.2/93.2
10	A/B	94.8/94.4	93.2/94.0	92.8/93.6	94.04	92.9/93.6
12	A/B	94.2/93.9	92.9/93.5	92.6/93.2	93.69	
15	A/B	93.8/93.7	92.8/93.2	92.5/92.9		



Gbr 7.3 Deformasi - Bentuk Setengah Bola

7.3 Panel Silinder (Cylindrical Shell Roofs)



Gbr 7.4 Panel Silinder (Cylindrical Shell Roofs)

Data:

$$L = 6 \text{ m}; R = 3 \text{ m}; h = 0.03 \text{ m}; \phi = 40^\circ$$

$$E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}; \nu = 0; f_z = -0.625 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Kondisi batas:

$$U = W = \theta_Y = 0 \text{ pada sisi AD}$$

Kondisi simetris:

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ pada sisi CD}; V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ pada sisi CB}$$

Nilai referensi (Teori Deep Shell):

$$W_B = -3.61 \text{ cm}; W_C = 0.541 \text{ cm}$$

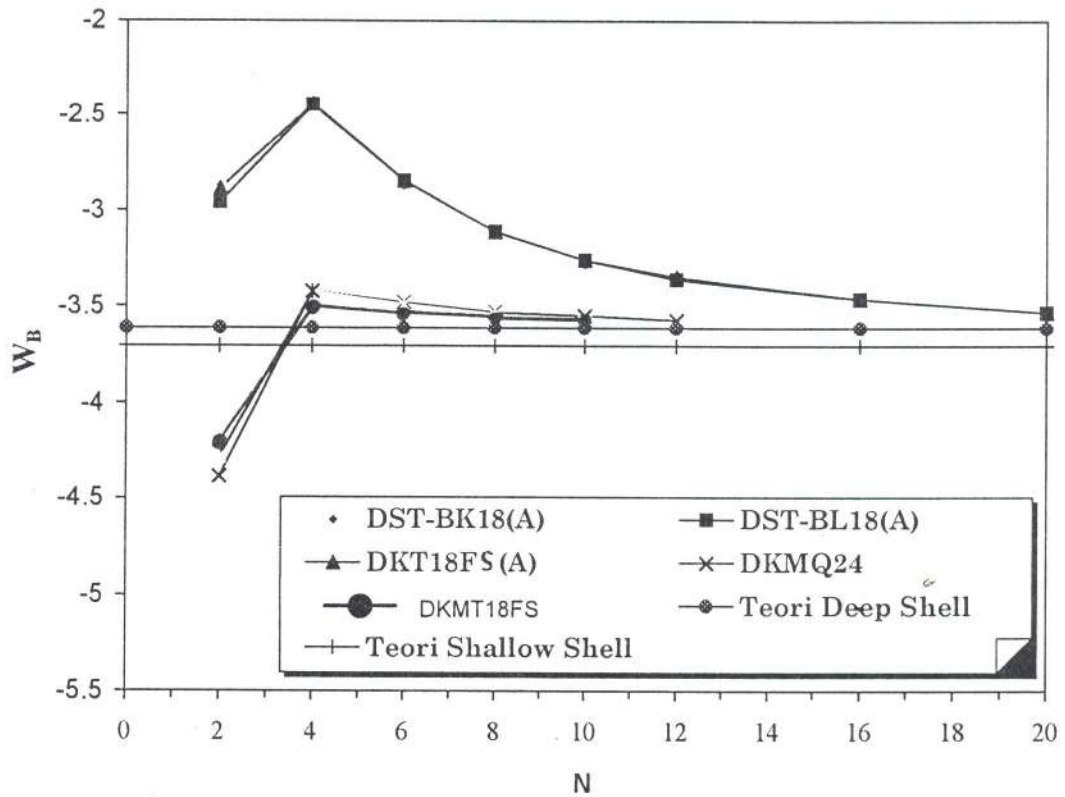
Nilai solusi analitik (Teori Shallow Shell):

$$W_B = -3.703 \text{ cm}; W_C = 0.525 \text{ cm}$$

Kasus yang dipresentasikan pada gambar 7.4 adalah problem yang digunakan untuk membandingkan performa elemen bidang datar (Facet Shell), lengkung, dan isoparametrik. Struktur ini memiliki sebuah panel silinder dengan kondisi batas bebas di sepanjang silinder dan di sisi lain (bidang arah melintang panel) berupa bidang diafragma kaku. Karakteristik geometri dan mekanik dapat dilihat pada gambar 7.4. Cangkang ini memiliki beban sendiri (beban terbagi merata vertikal) sebesar $f_z = -0.625 \cdot 10^4$ Pa di seluruh permukaan.

Sebuah penyelesaian analitik berdasarkan Teori Shallow Shell dikemukakan oleh Scordelis dan Lo [Ref. S2]. Penyelesaian tersebut memiliki 2 - 3 % perbedaan dibandingkan penyelesaian dengan Teori Deep Shell. Deformasi geser lintang kecil sekali, sehingga dapat diabaikan, dan deformasi membran lebih dominan dibandingkan dengan deformasi lenturnya.

Struktur dianalisa seperempat bagian karena simetri. Jumlah mesh beraturan: $N=2, 4, 6, 8, 10, 12, 16$ dan 20 elemen sepanjang sisi AB dan BC. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar 7.4. Hasil uji numerik elemen quadrilateral DKMQ24 dan elemen segitiga DKT18FS, DST-BL18, DST-BK18, DKMT18FS ditulis pada tabel 7.2 dan gambar 7.5. Kami mengamati bahwa elemen-elemen yang digunakan, memberikan hasil yang menuju solusi Teori Deep Shell. Elemen DKMT18FS dan DKMQ24 memberikan hasil yang baik dan hampir serupa.

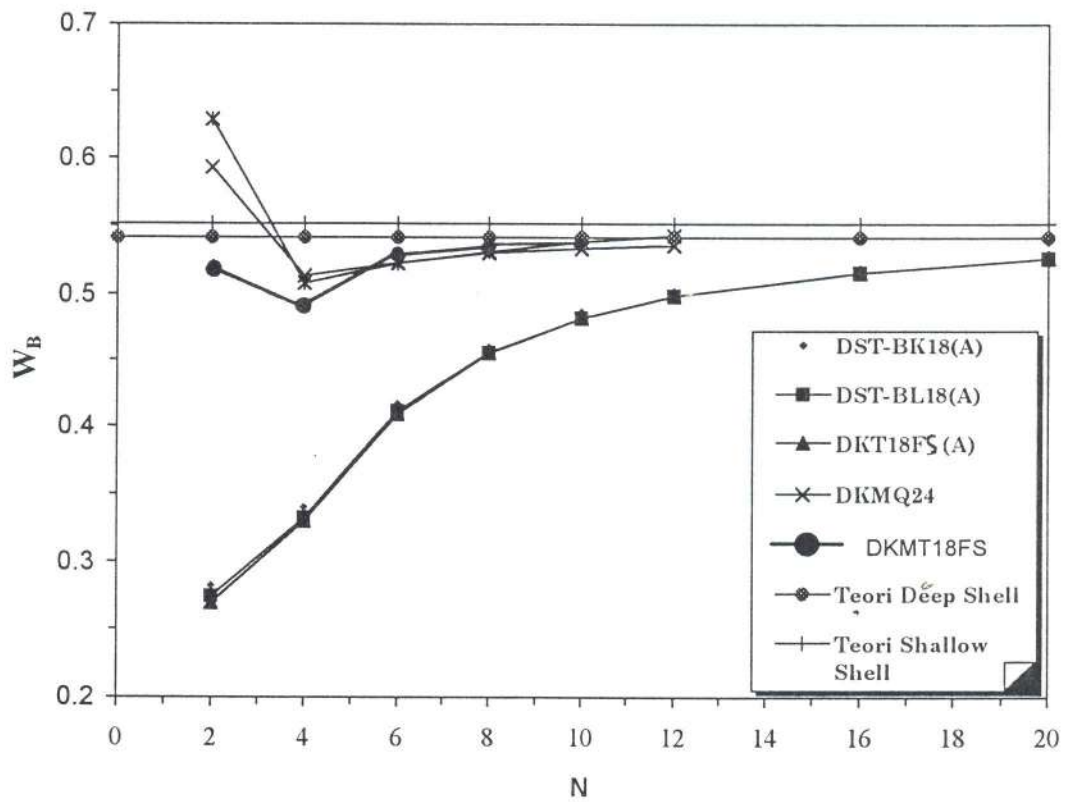


Gbr 7.5a Konvergensi Lendutan W_B - Panel Silinder

Tabel 7.2a: Lendutan W_B

Nilai referensi: $W_B = -3.61$ cm (-3.707 cm untuk Teori Shallow Shell)

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	-2.87/-4.35	-2.96/-4.06	-2.89/-3.98	-4.39	-4.31/-5.89
4	A/B	-2.46/-2.74	-2.45/-2.68	-2.44/-2.67	-3.42	-3.53/-3.87
6	A/B	-2.88/-3.01	-2.85/-2.96	-2.85/-2.96	-3.48	-3.54/-3.68
8	A/B	-3.13/-3.21	-3.11/-3.18	-3.11/-3.17	-3.53	-3.56/-3.64
10	A/B	-3.28/-3.33	-3.26/-3.31	-3.26/-3.30	-3.55	-3.58/-3.63
12	A/B	-3.37/-3.41	-3.36/-3.39	-3.35/-3.38	-3.57	
16	A/B	-3.47/-3.49	-3.46/-3.48	-3.46/-3.48		
20	A/B	-3.55/-3.56	-3.53/-3.54	-3.53/-3.54		

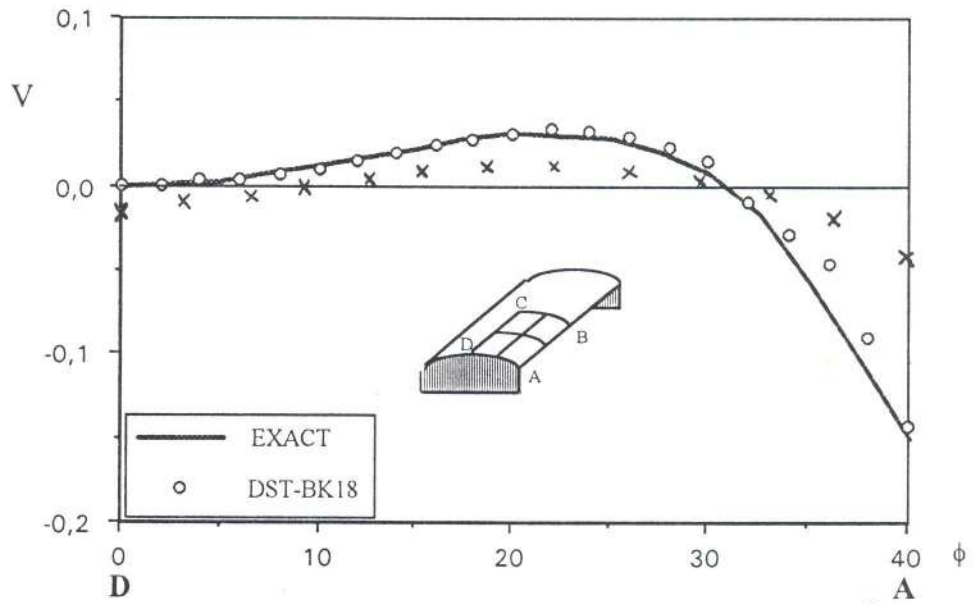


Gbr 7.5b Konvergensi Lendutan W_C - Panel Silinder

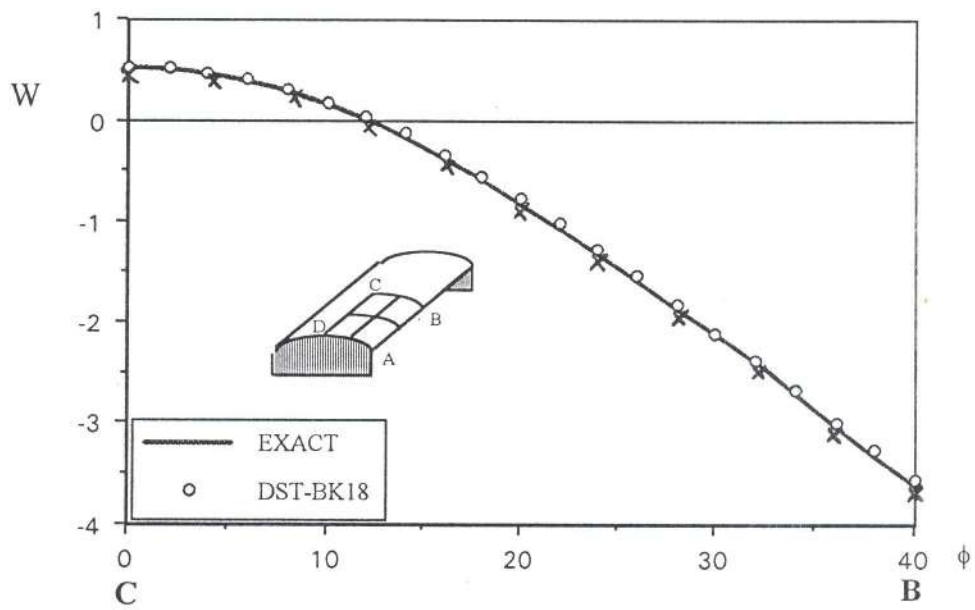
Tabel 7.2b: Lendutan W_C

Nilai referensi: $W_C = 0.541$ cm (0.552 cm untuk Teori Shallow Shell)

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	0.282/0.447	0.274/0.450	0.269/0.444	0.593	0.539/0.889
4	A/B	0.340/0.396	0.332/0.396	0.330/0.394	0.513	0.494/0.587
6	A/B	0.417/0.443	0.411/0.442	0.409/0.441	0.523	0.515/0.557
8	A/B	0.460/0.476	0.456/0.474	0.455/0.473	0.530	0.526/0.549
10	A/B	0.487/0.496	0.482/0.494	0.482/0.493	0.533	0.531/0.546
12	A/B	0.502/0.509	0.498/0.507	0.498/0.506	0.536	
16	A/B	0.519/0.522	0.516/0.521	0.516/0.520		
20	A/B	0.530/0.530	0.526/0.528	0.526/0.528		



(a) Lendutan V sepanjang Sisi DA

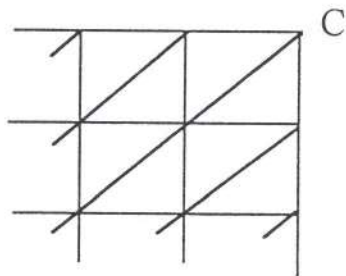
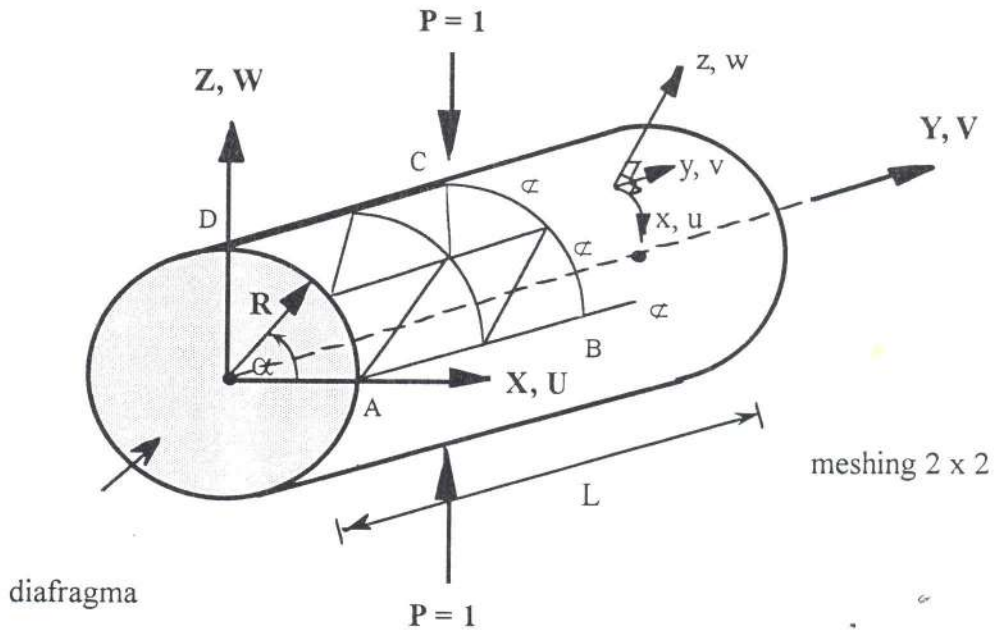


(b) Lendutan W Sepanjang Sisi CB

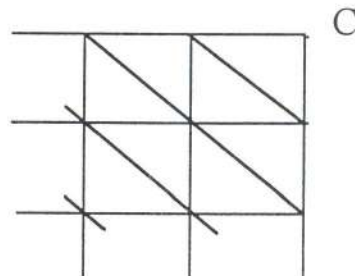
Gbr 7.6 Lendutan Sepanjang Sisi DA dan CB ($N=12$)

Catatan : $x = DKMT18FS$

7.4 Pipa Silinder (Circular Cylindrical Shells)



meshing A



meshing B

Gbr 7.7 Pipa Silinder (Circular Cylindrical Shells)

Data:

$$L = 6 \text{ m}; R = 3 \text{ m}; h = 0.03 \text{ m dan } 0.3 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3; E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}; F_z \text{ pada } C = -0.25 \text{ N}$$

Kondisi batas:

$$U = W = \theta_Y = 0 \text{ pada sisi AD}$$

Kondisi simetris:

$$W = \theta_Y = \theta_X = 0 \text{ pada sisi AB}; V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ pada sisi BC}$$

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ pada sisi CD}$$

Nilai referensi ($R/h = 100$):

$$\underline{W}_C = -Eh W_C / P = 164.24$$

$$\underline{V}_D = Eh V_D / P = 4.114$$

Nilai referensi ($R/h = 10$):

$$\underline{W}_C = -Eh W_C / P = 11.351$$

$$\underline{U}_B = Eh V_D / P = 1.531$$

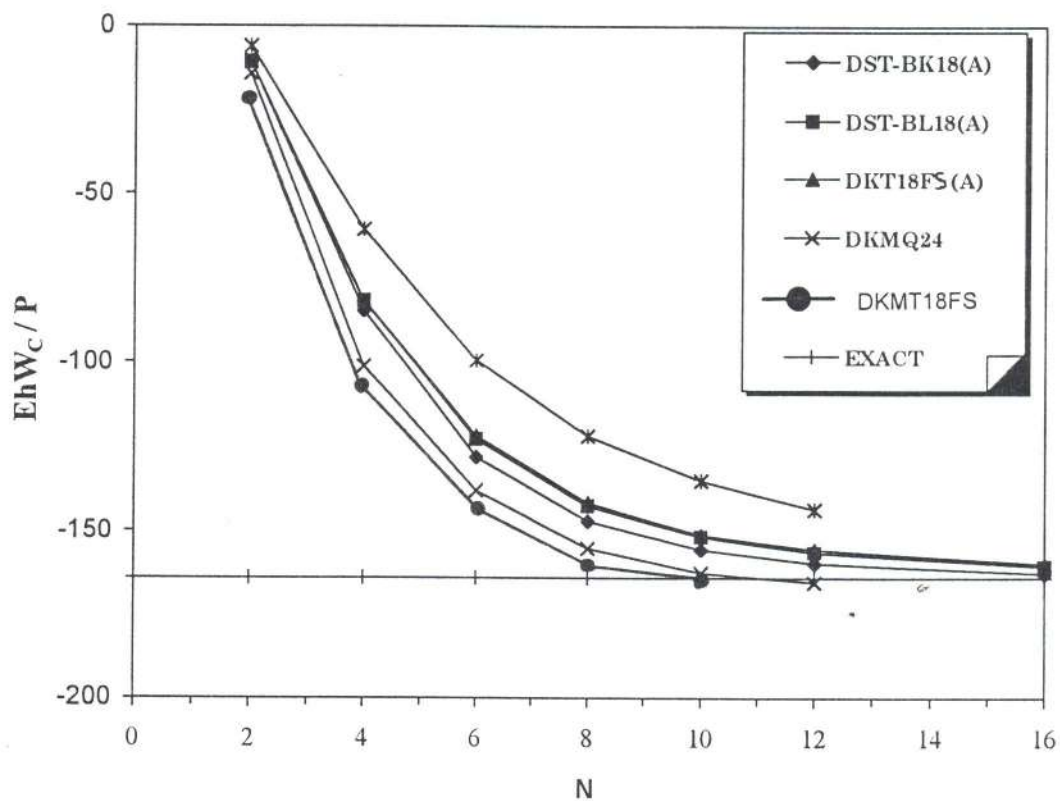
Struktur seperti pada gambar 7.7 adalah sebuah pipa silinder dengan 2 buah beban terpusat yang terletak berseberangan dan berlawanan arah. Pada kedua ujungnya terdapat diafragma yang kaku.

Karakteristik geometri dan mekanik dapat dilihat pada gambar 7.7. Contoh ini merupakan ujian yang keras untuk elemen cangkang yang menunjukkan bidang deformasi dari membran kompleks di mana sebagian struktur (di bawah beban terpusat) didominasi oleh efek lentur $\pm 70\%$. Disajikan dalam dua rasio ketebalan, $R/h=100$ dan 10. Untuk $R/h=100$, penyelesaian analitiknya (Teori Kirchhoff) dikemukakan oleh G.M. Lindberg *et al* [Ref. L3] dengan memperhatikan solusi dari W. Flugge [Ref. F1] yang mengembangkan deret Fourier. Sedangkan untuk $R/h=10$ solusi analitis (Teori Mindlin) yang memperhitungkan efek geser lintang dan dikemukakan oleh K. Bhaskar dan T.K. Varadan [Ref. B9].

Cangkang tersebut dianalisa seperdelapan bagian karena alasan simetris dan sebagai elemen pembanding digunakan elemen-elemen segiempat DKMQ24 dan segitiga DKT18FS, DST-BL18, DST-BK18. Kami mengamati kecepatan konvergensi elemen-elemen untuk meshing biasa dengan $N=2,4,6,8,10,12$ dan 16, pada sisi AB dan BC.

Hasil numerik dari elemen-elemen yang berbeda disajikan dalam dua laporan (untuk $R/h=100$ dan 10) pada tabel 7.3-4(a dan b) dan gambar 7.8-9(a dan b), dalam fungsi dari jumlah elemen terhadap W_c dan V_d . Gambar 7.10 memperlihatkan deformasi global dengan mesh 10×10 . Deformasi menurut sistem koordinat global, lendutan normal w pada sisi DC dan BC, serta lendutan tangensial v pada sisi AD telah dipresentasikan pada gambar 7.11 untuk $R/h=100$ dan mesh 10×10 dengan menggunakan elemen DKMT18FS. Sedangkan gambar 7.12-13 mempresentasikan hasil perhitungan dari gaya resultan N_x , N_y dan M_x pada sisi BC dan pada DC. Gambar 7.14 mempresentasikan gaya resultan M_{xy} dan N_{xy} pada sisi AD. Meshing yang tidak besar menyebabkan beberapa hasil numerik kurang baik.

Kasus $R/h=10$ dipresentasikan pada tabel 7.4 dan gambar 7.9. Dari gambar dapat ditarik kesimpulan bahwa efek geser lintang berpengaruh dalam kasus ini. Di mana elemen DKQ24 dan DKT18FS (yang mengabaikan efek geser lintang) memberikan hasil yang kurang memuaskan dibanding elemen DST-BL18, DST-BK18, DKMT18FS dan DKMQ24.

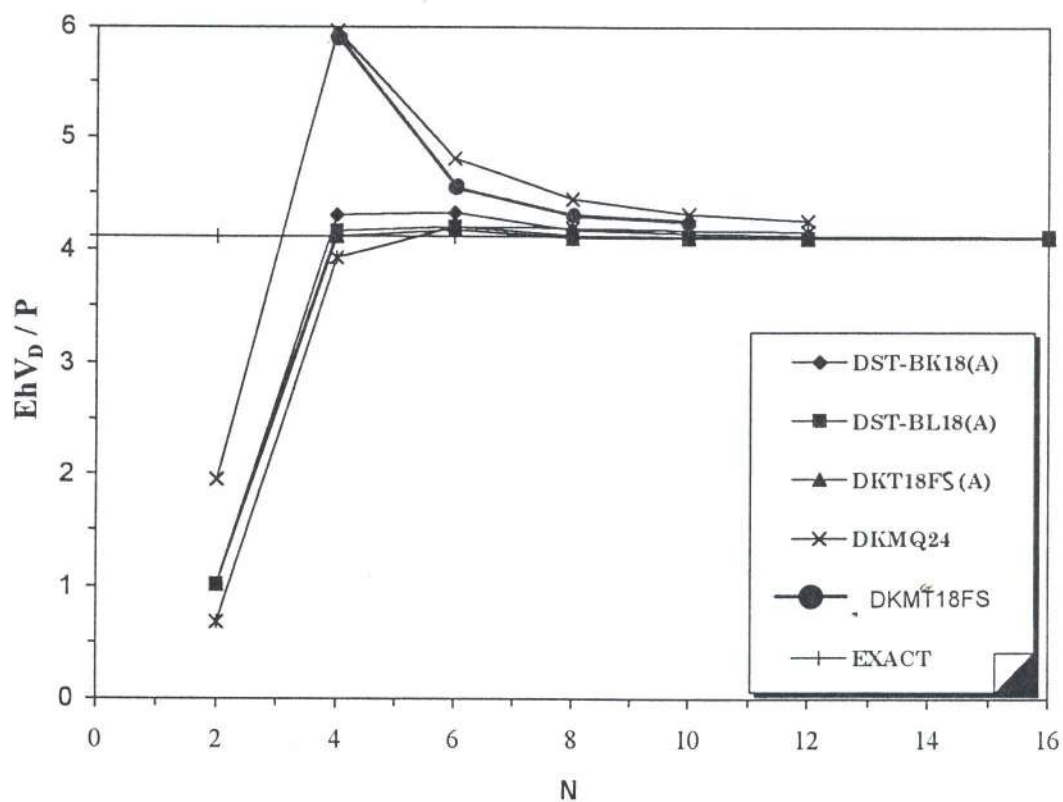


Gbr. 7.8a Konvergensi Lendutan W_C - Pipa Silinder

Tabel 7.3a: Lendutan W_C ($R/h = 100$)

Nilai referensi: $\underline{W}_C = 164.24$

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	10.66/8.87	10.66/8.87	10.65/8.86	14.07	43.22/43.86
4	A/B	84.94/76.99	81.87/76.77	80.86/75.92	101.29	104.82/111.41
6	A/B	128.12/119.28	123.10/120.30	122.13/119.36	138.21	134.16/140.93
8	A/B	147.01/138.52	142.53/141.98	141.76/141.22	155.22	149.27/156.44
10	A/B	155.64/148.27	151.77/153.37	151.08/152.71	162.58	159.19/163.73
12	A/B	159.75/153.52	156.46/159.20	155.77/158.57	165.64	
16	A/B	163.11/158.59	160.74/163.88	159.99/163.24		

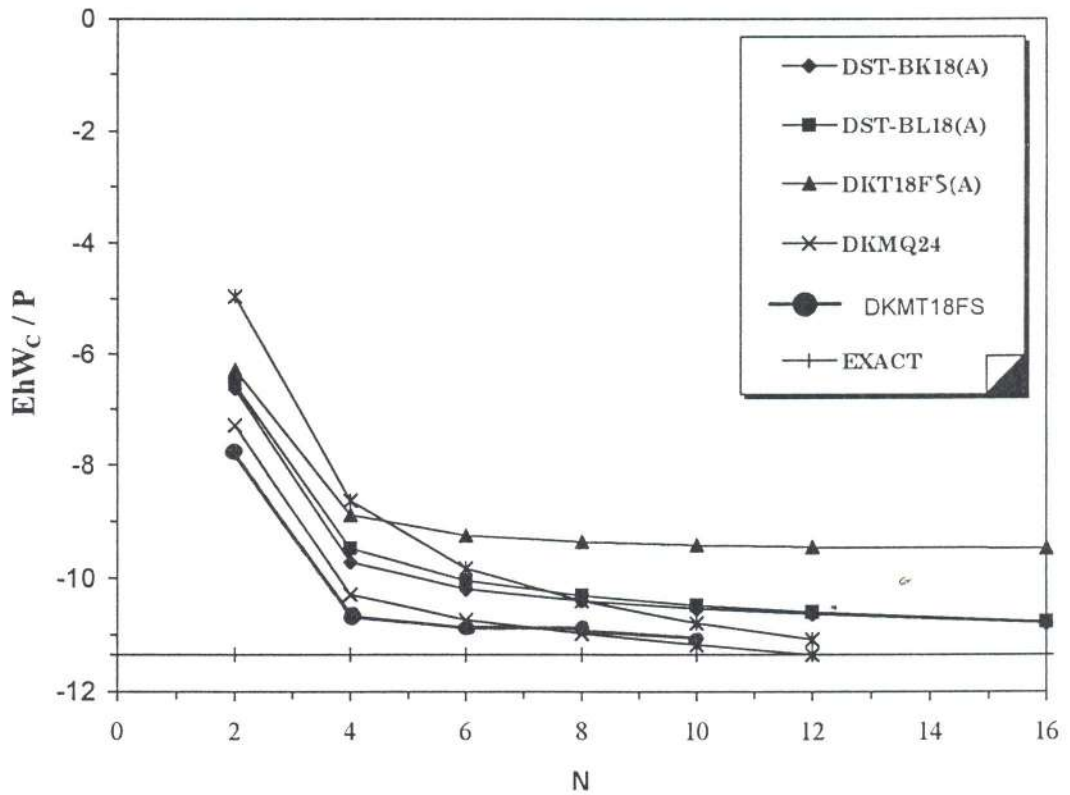


Gbr. 7.8b Konvergensi Lendutan V_D - Pipa Silinder

Tabel 7.3b: Lendutan V_D ($R/h = 100$)

Nilai referensi: $\underline{V}_D = 4.114$

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	1.015/0.792	1.014/0.792	1.013/0.791	1.95	7.370/10.860
4	A/B	4.302/4.107	4.164/4.077	4.114/4.032	5.96	6.016/5.870
6	A/B	4.322/4.264	4.201/4.233	4.172/4.203	4.80	4.643/4.679
8	A/B	4.174/4.151	4.120/4.135	4.105/4.119	4.45	4.383/4.402
10	A/B	4.140/4.127	4.111/4.116	4.102/4.107	4.32	4.283/4.293
12	A/B	4.128/4.120	4.110/4.112	4.104/4.106	4.26	
16	A/B	4.119/4.116	4.111/4.112	4.109/4.109		

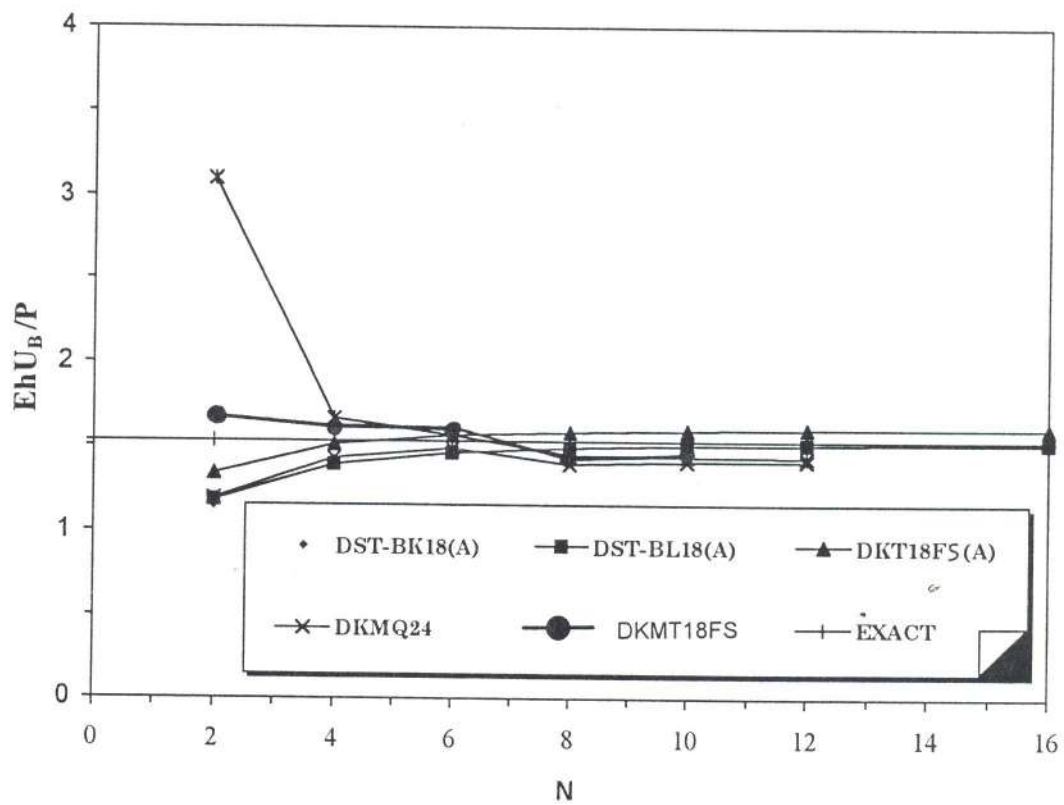


Gbr. 7.9a Konvergensi Lendutan W_C - Pipa Silinder

Tabel 7.4a: Lendutan W_C ($R/h = 10$)

Nilai referensi: $\underline{W}_C = 11.351$ (9.456 untuk Teori de Flugge)

N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A/B	6.646/5.719	6.558/5.946	6.303/5.794	7.284	7.844/7.388
4	A/B	9.719/9.085	9.482/9.724	8.871/9.234	10.302	9.636/10.394
6	A/B	10.20/9.797	10.05/10.30	9.249/9.581	10.744	10.134/10.659
8	A/B	10.41/10.13	10.31/10.51	9.368/9.614	10.979	10.364/10.729
10	A/B	10.54/10.34	10.48/10.64	9.421/9.604	11.173	10.665/10.778
12	A/B	10.64/10.49	10.60/10.73	9.448/9.589	11.350	
16	A/B	10.79/10.70	10.78/10.87	9.473/9.564		

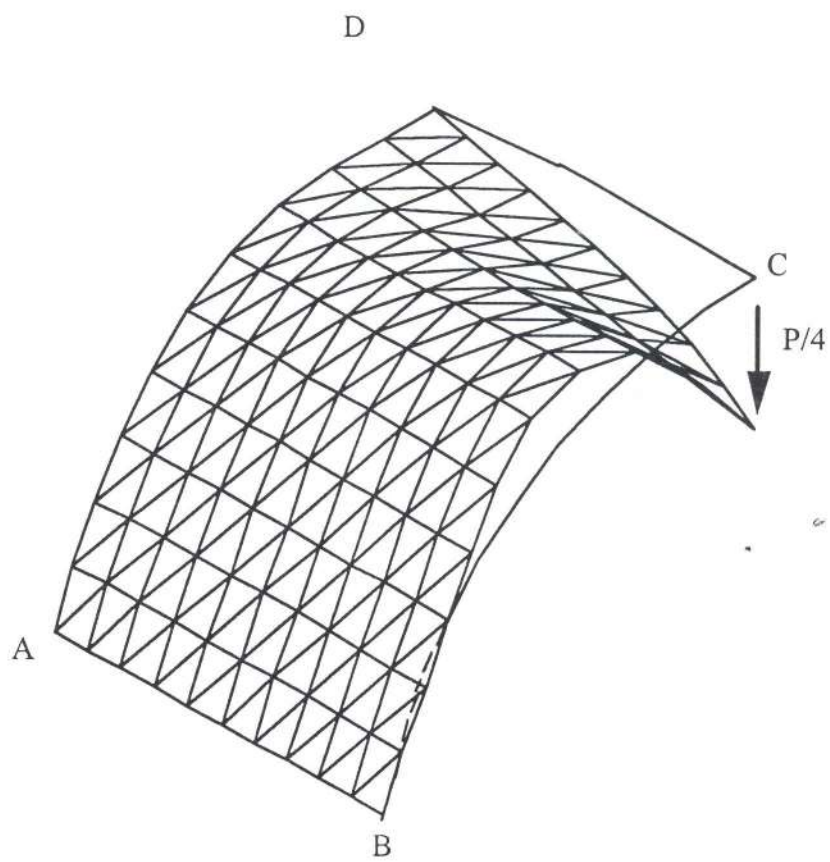


Gbr. 7.9b Konvergensi Lendutan U_B - Pipa Silinder

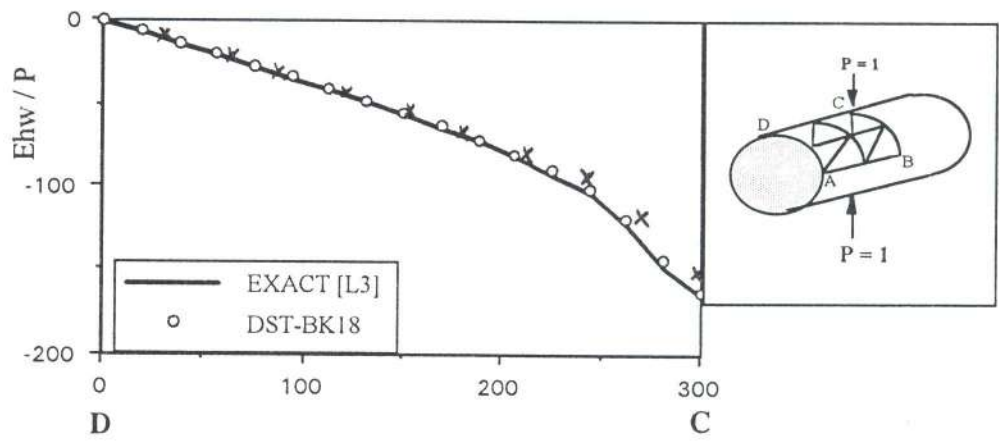
Tabel 7.4b: Lendutan U_B ($R/h = 10$)

Nilai referensi: $\underline{U}_B = 1.531$

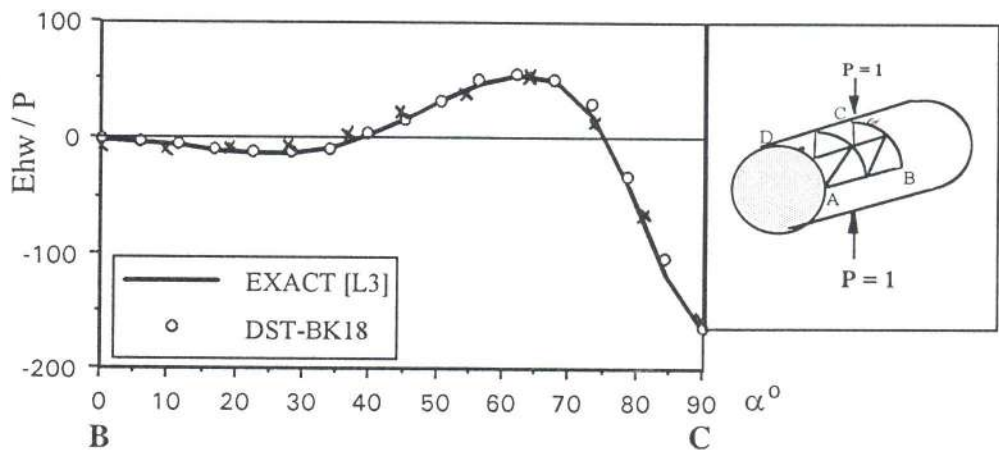
N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A=B	1.149	1.178	1.341	1.194	1.695
4	A=B	1.421	1.389	1.512	1.430	1.596
6	A=B	1.485	1.464	1.563	1.485	1.568
8	A=B	1.506	1.492	1.583	1.396	1.492
10	A=B	1.516	1.504	1.593	1.413	1.503
12	A=B	1.521	1.511	1.599	1.415	
16	A=B	1.525	1.517	1.604		



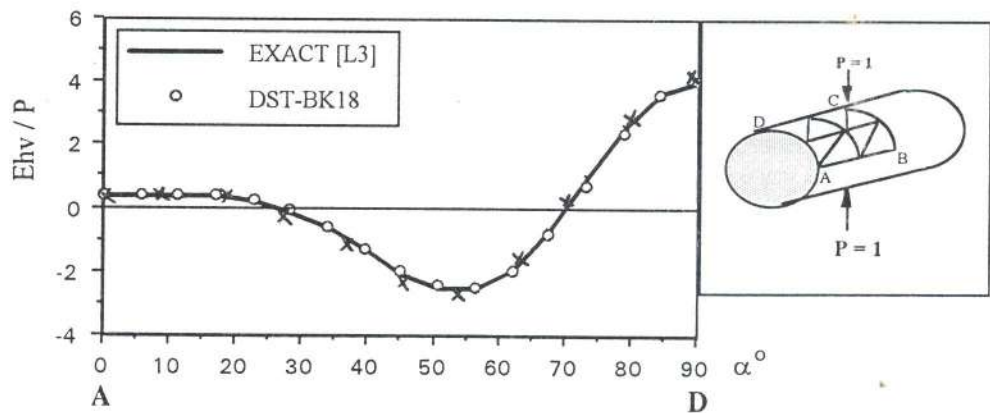
Gbr. 7.10 Deformasi Global (Mesh 10 x 10)



(a) Lendutan Sepanjang Sisi DC

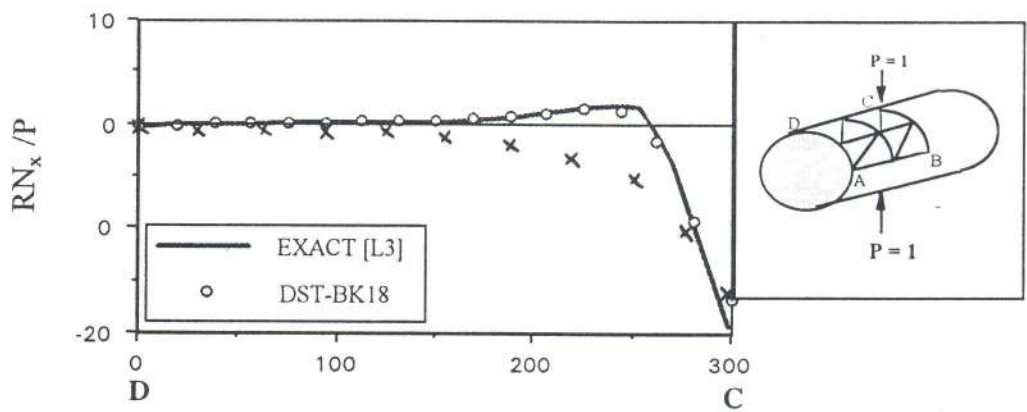


(b) Lendutan Sepanjang Sisi BC

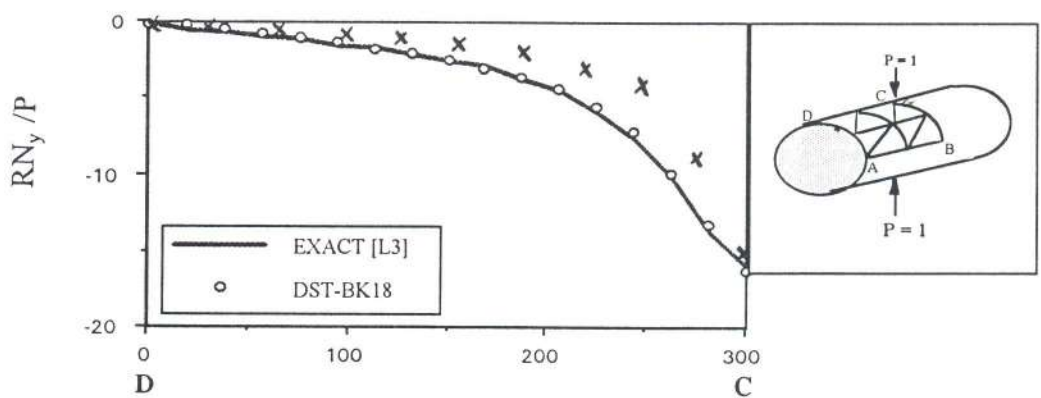


(c) Lendutan Sepanjang Sisi AD

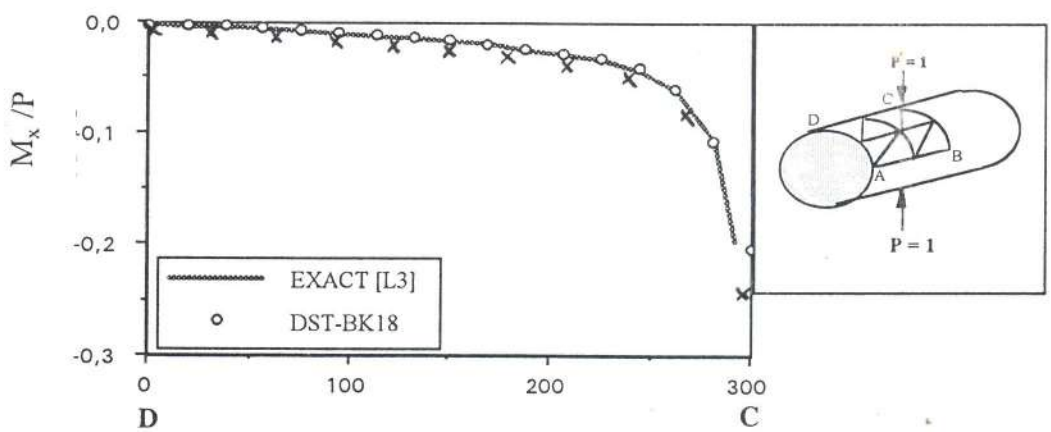
Gbr. 7.11 Lendutan Sepanjang DC, BC dan AD ($R/h = 100$)



(a) Gaya Dalam Resultan N_x

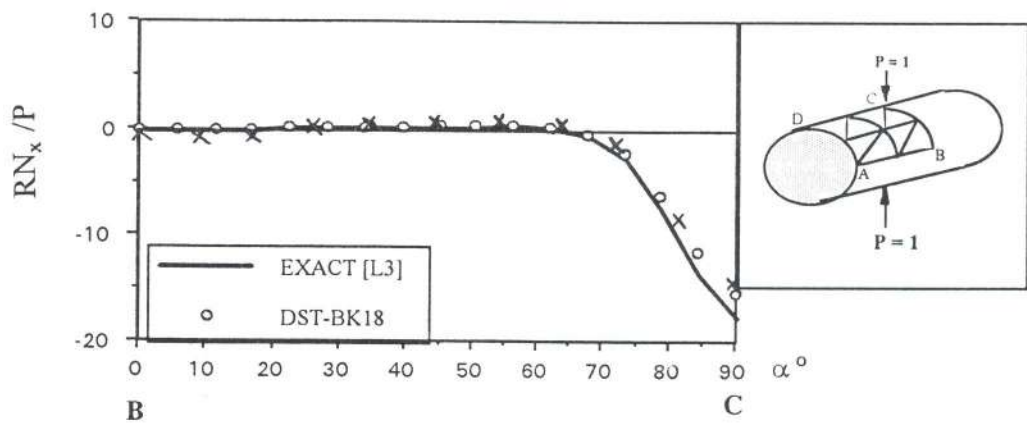


(b) Gaya Dalam Resultan N_y

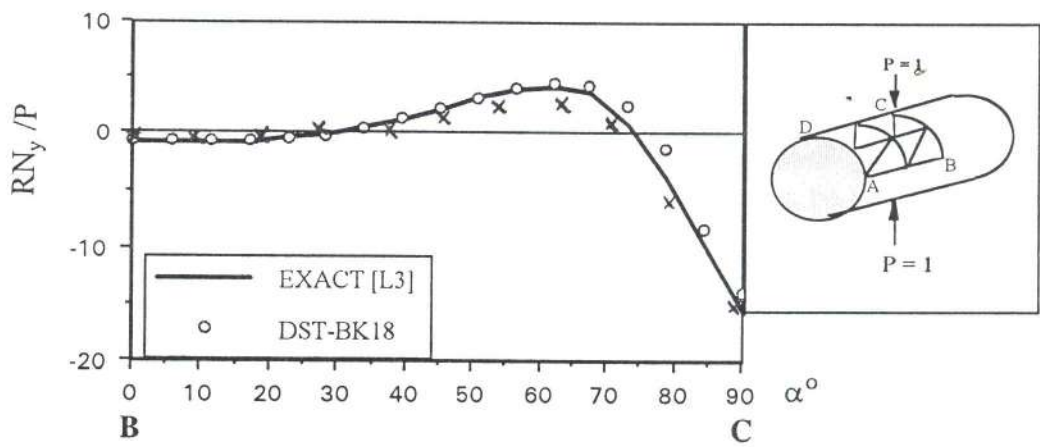


(c) Gaya Dalam Resultan M_x

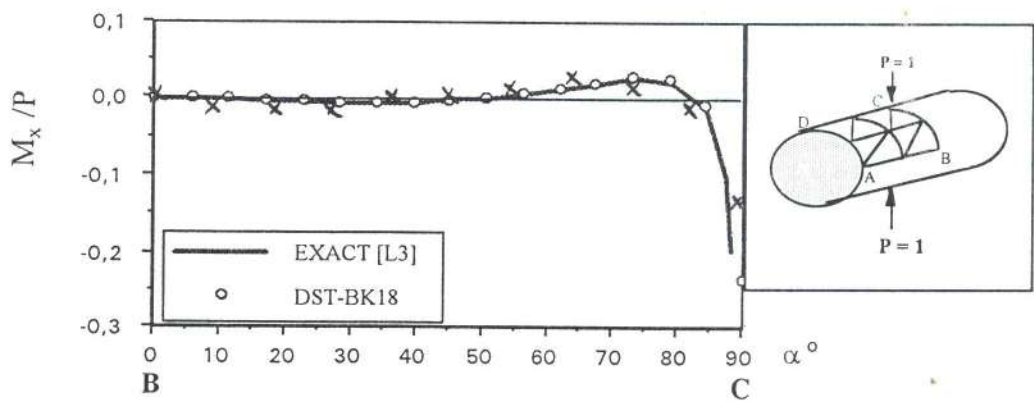
Gbr. 7.12 Gaya Dalam Resultan Sepanjang DC ($R/h = 100$)



(a) Gaya Dalam Resultan N_x

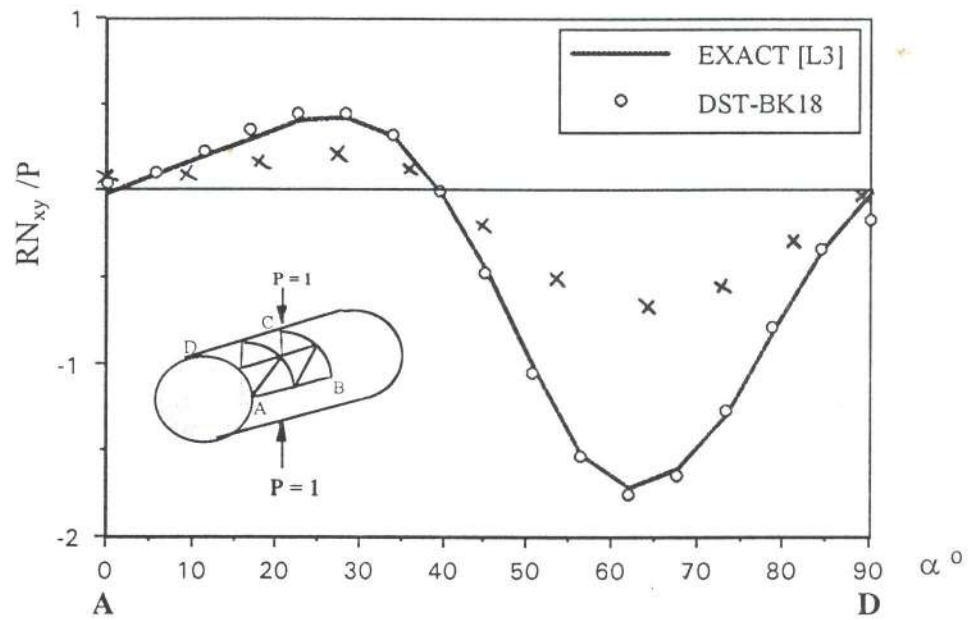


(b) Gaya Dalam Resultan N_y

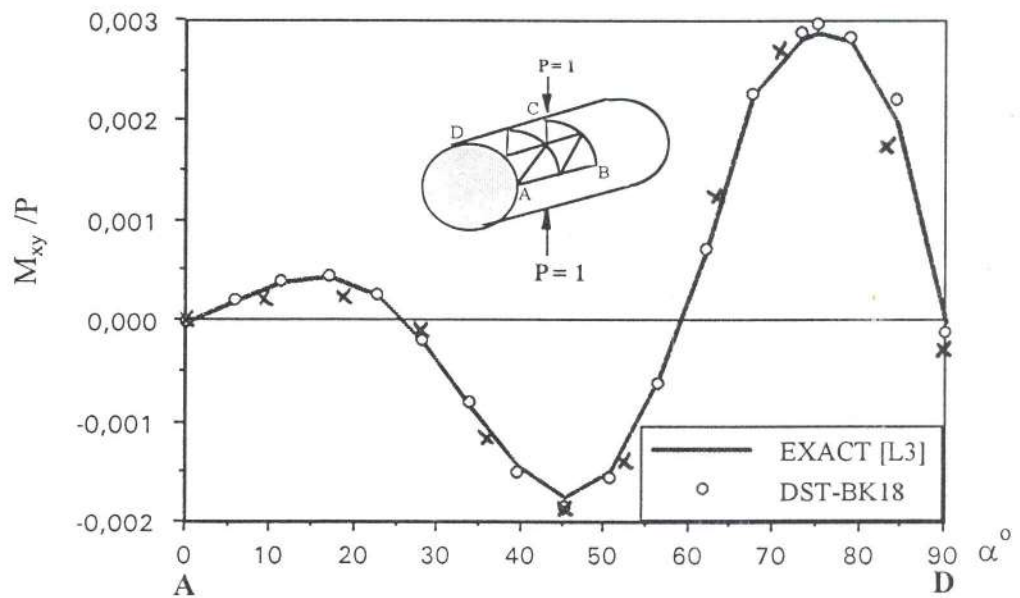


(c) Gaya Dalam Resultan M_x

Gbr. 7.13 Gaya Dalam Resultan Sepanjang BC ($R/h = 100$)



(a) Gaya Dalam Resultan N_{xy}

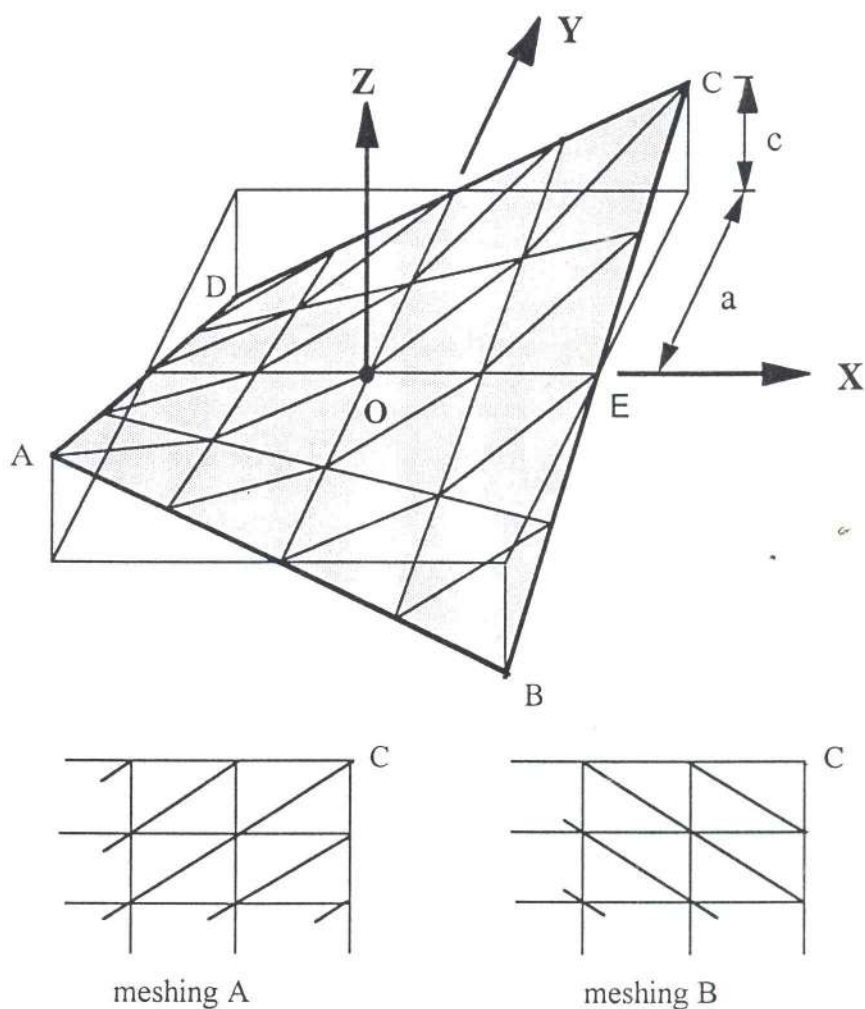


(b) Gaya Dalam Resultan M_{xy}

Gbr. 7.14 Gaya Dalam Resultan Sepanjang AD ($R/h = 100$)

Catatan : x = DKMT18FS

7.5 Bentuk Parabol-Hiperbola (Paraboloid-Hyperboloid Shells)



Gbr.7.15 Bentuk Parabol-Hiperbola (Paraboloid-Hyperboloid Shells)

Data:

$$a = 50 \text{ cm}; c = 10 \text{ cm}; h = 0.8 \text{ cm}; E = 28500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.4; \text{ beban arah normal terbagi rata } f_z = 0.01 \text{ kg/cm}^2; Z = \left(\frac{c}{a^2}\right) XY$$

Kondisi batas:

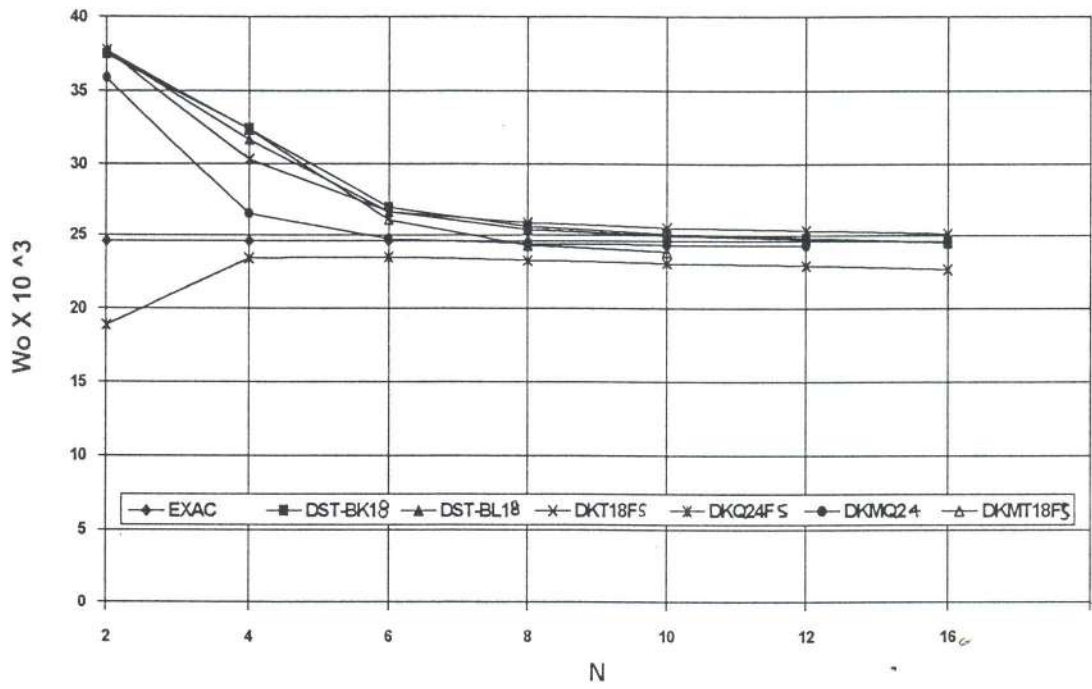
$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ sepanjang sisi ABCD}$$

Masalah klasik lainnya adalah masalah parabol-hiperbola yang mengalami beban arah normal terbagi rata f_z . Karakteristik geometri dan mekanik dapat dilihat seperti pada gambar 7.15. Bentuk ini merupakan cangkang yang memiliki kelengkungan Gaussian

negatif dengan kondisi batas berupa garis lurus. Proyeksi dari sumbu Z berbentuk segiempat, dengan basis $2a \times 2a$, dan dijepit di sisi-sisinya. Cangkang ini secara geometri merupakan Shallow Shell.

Gambar 7.16 mempresentasikan konvergensi beberapa elemen sebagai fungsi dari lendutan dan jumlah elemen. Hasil numerik dikemukakan pada tabel 7.5. Dan gambar 7.17 menunjukkan nilai dari lendutan w sepanjang sisi OE dan OB hingga mesh 10×10 . Perlu diperhatikan bahwa w maksimum tidak pada pusat tetapi bergeser 25 cm dari pusat.

Dari pengamatan didapati kesamaan bahwa program untuk konvergensi enam elemennya menuju nilai referensi yang diberikan [Ref. B10] kecuali elemen DKQ24FS di mana garis konvergensinya tidak begitu baik. Hal ini dikarenakan pada formulasi DKQ24FS, pengaruh Warping Factor tidak diperhitungkan.

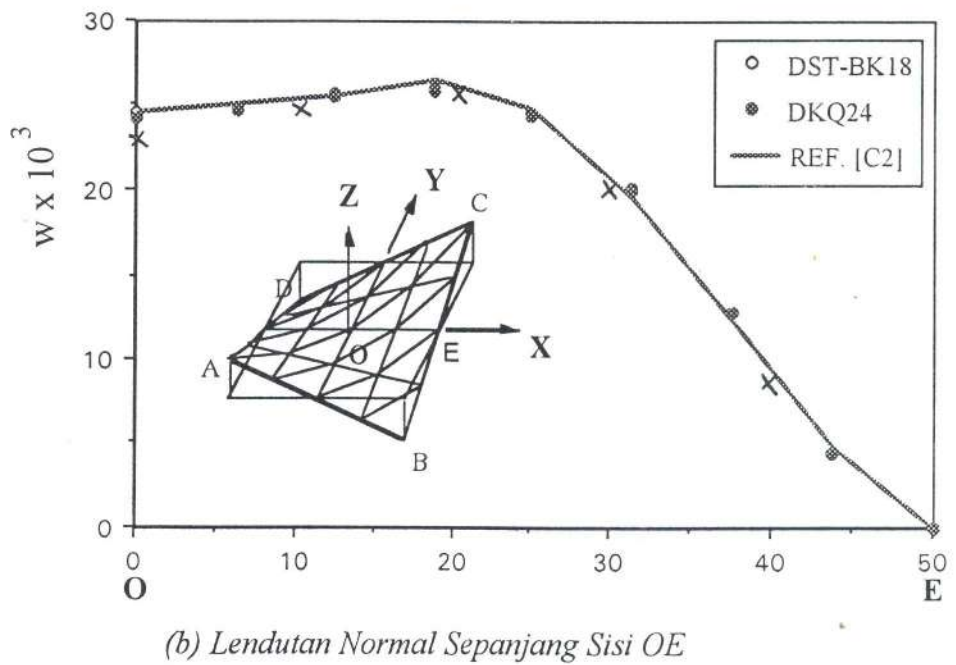
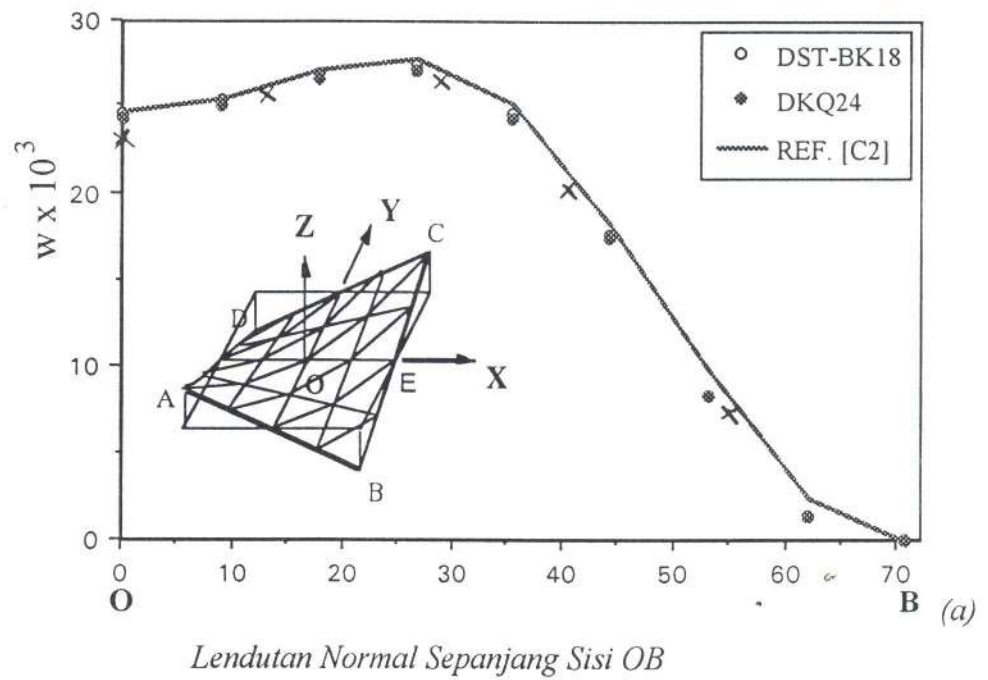


Gbr. 7.16 Konvergensi Lendutan W_O - Bentuk Parabol-Hiperbola

Tabel 7.5: Lendutan W_O

Nilai referensi: $\underline{W}_O = W_O \times 10^3 = 24.60$

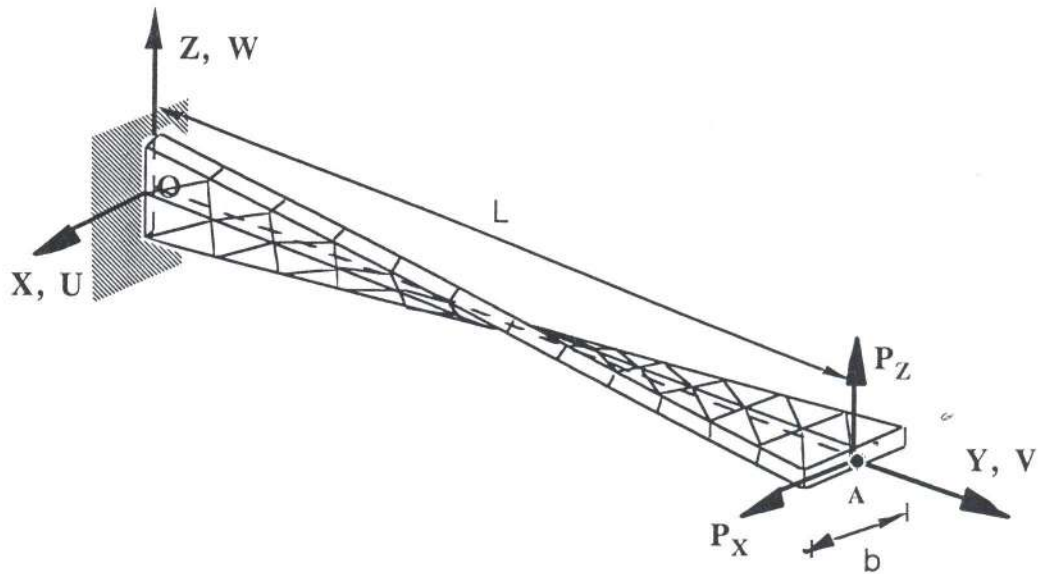
N	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT18FS	DKQ24FS	DKMQ24	DKMT18FS
2	A=B	37.49	37.75	37.73	18.88	35.90	37.73
4	A=B	32.43	31.68	30.32	23.40	26.50	32.35
6	A=B	26.94	26.59	26.62	23.48	24.71	26.05
8	A=B	25.61	25.39	25.87	23.25	24.40	24.26
10	A=B	25.09	24.92	25.52	23.06	24.31	23.83
12	A=B	24.82	24.70	25.32	22.90	24.27	
16	A=B	24.57	24.49	25.12	22.65		



Gbr. 7.17 Lendutan Normal Sepanjang OB dan OE - Bentuk Parabol-Hiperbola

Catatan : x = DKMT18FS

7.6. Bentuk Helicoidales atau Twisted Beam



mesh 2 x 12

Gbr. 7.18 Bentuk Helicoidales atau Twisted Beam

Data:

Rotasi sebesar 90° antara O dan A

$L = 12 \text{ m}$; $b = 1.1 \text{ m}$; $h = 0.0032 \text{ m}$ dan 0.32 m

$E = 29 \times 10^6 \text{ Pa}$; $\nu = 0.22$

Kondisi batas:

$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ pada perletakan

Data geometri bidang tengah merupakan fungsi dari s dan θ :

$X = s \cos \theta$; $Y = 2 \theta L / \pi$; $Z = s \sin \theta$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$; $-0.5 b \leq s \leq +0.5 b$

Kasus cangkang berbentuk Helicoidale dengan ujung terjepit dan beban terpusat di sisi yang lain ini dapat dilihat pada gambar 7.18. Uji ini diperkenalkan oleh R.J. MacNeal dan R.L. Harder [Ref. M4, hal.3-20]. Kasus ini digunakan sejak tahun 1985 dan menjadi salah satu uji keabsahan suatu elemen cangkang.

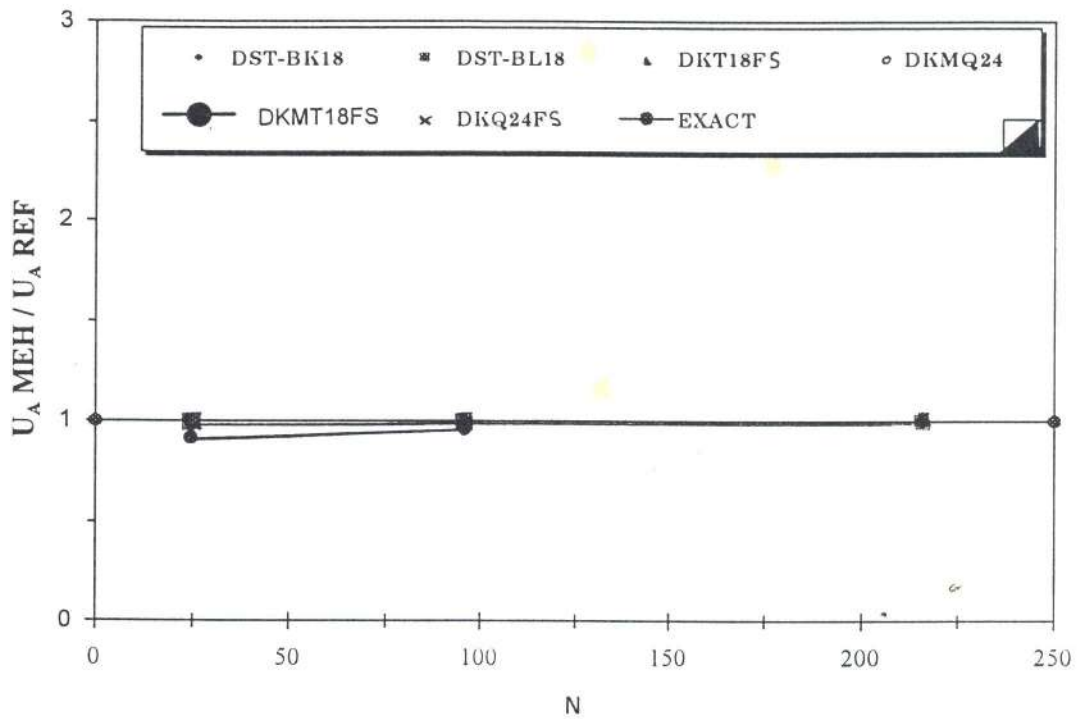
Kasus ini memberikan banyak kesulitan untuk elemen yang diformulasi dengan pendekatan Bidang Datar (Facet Shell), berbentuk segitiga dan quadrilateral dengan mengabaikan deformasi geser lintang. Penyelesaian dari referensi didasari Teori Balok (di mana deformasi arah transversal diabaikan), dan dengan atau tanpa memperhitungkan deformasi geser lintang [Ref. B11].

Hasil yang didapat untuk $h = 0.0032$ m dan 0.32 m dipresentasikan pada tabel 7.6-7 dan gambar 7.19(a dan b) dengan meshing 2×12 , 4×24 dan 6×36 . Untuk $h = 0.0032$ m ($L/h = 3750$), elemen DST-BL18FS identik dengan elemen DKT18FS, untuk $h = 0.32$ m ($L/h = 37.5$), elemen DST-BL18FS tidak konvergen menuju solusi yang diberikan oleh referensi, meskipun deformasi geser lintang sangat kecil pengaruhnya.

Konvergensi yang lebih lamban dicapai elemen DKT18FS, DST-BL18 dan DST-BK18 pada kasus pembebanan tegak lurus bidang ($P_z=1$ dan $P_x=0$). Hal ini disebabkan karena pada daerah perletakan, perilaku struktur didominasi oleh pengaruh membran. Dalam hal ini elemen-elemen tersebut menggunakan elemen membran CST. Untuk kasus beban searah bidang ($P_x=1$ dan $P_z=0$), konvergensi yang baik dicapai oleh elemen DKT18FS, DST- BL18 dan DST-BK18.

Elemen DKMQ24 yang dalam hal ini diformulasikan dengan modal pendekatan Degenerasi Tiga Dimensi memperlihatkan hasil yang memuaskan. Hal ini dikarenakan pada model ini Warping Factor secara implisit ikut diperhitungkan.

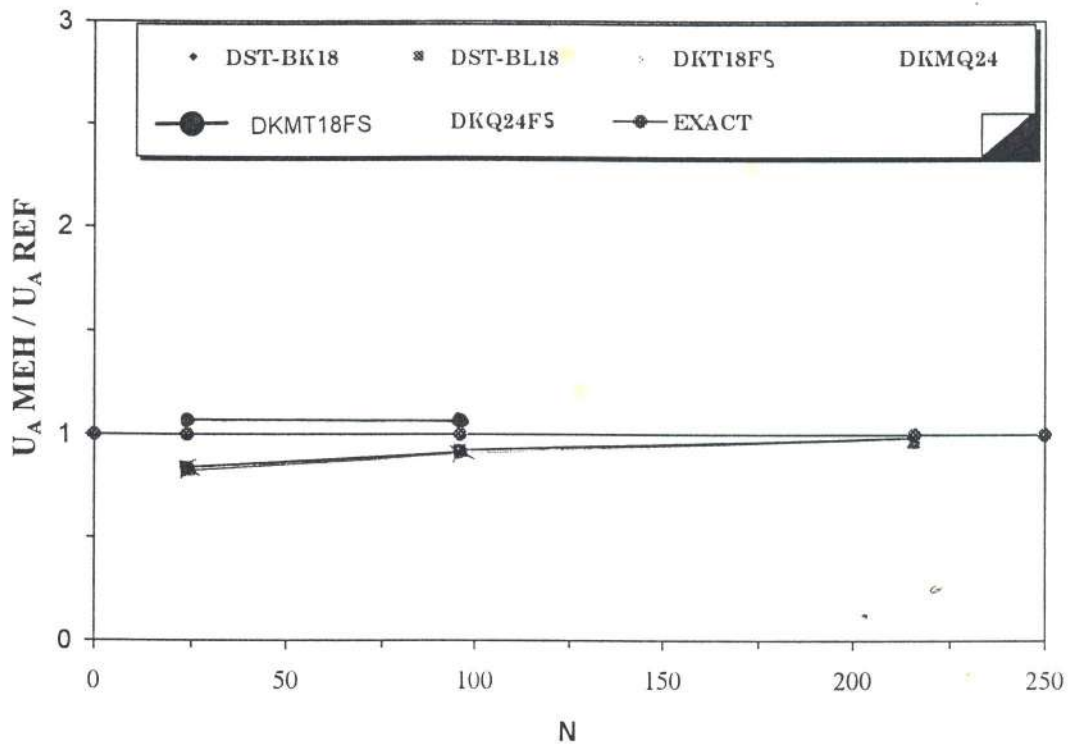
Elemen DKMT18FS menunjukkan hasil yang cukup memuaskan dan elemen ini merupakan elemen dengan pendekatan bidang datar yang menghasilkan grafik yang baik.



Gbr.7.19a Konvergensi untuk $h = 0.32$; $P_x = 1000$, $P_z = 0$

Tabel 7.6: Lendutan untuk $h = 0.0032$

Beban	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT-18FS	DKQ-24FS	DKMQ24	DKMT18FS
$P_x = .001$ $P_z = 0$	2 x 12	5.294	5.297	5.268	0.000274	5.202	5.255
	4 x 24	5.200	5.202	5.203	0.000939	5.212	5.249
	6 x 36	5.215	5.234	5.258	0.002060		
	Ref.[B11] $U_A = 5.316$						
$P_x = 0$ $P_z = .001$	2 x 12	1.291	1.289	1.285	0.000097	1.274	1.290
	4 x 24	1.283	1.282	1.282	0.000266	1.284	1.292
	6 x 36	1.284	1.284	1.287	0.000533		
	Ref.[B11] $W_A = 1.296$						

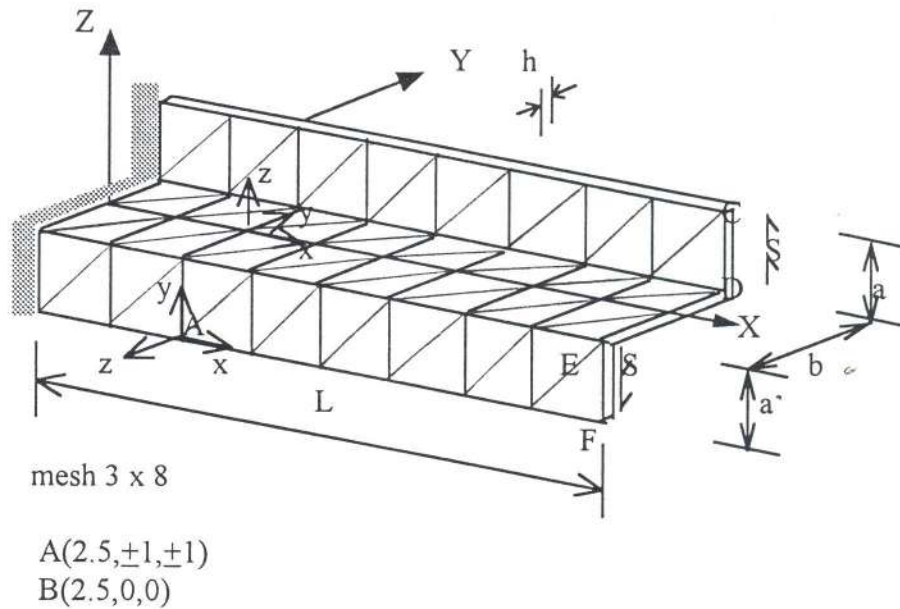


Gbr. 7.19b Konvergensi untuk $h = 0.32$; $P_x = 0$, $P_z = 1000$

Tabel 7.7: Lendutan untuk $h = 0.32$

Beban	Meshing	DST-BK18	DST-BL18	DKT-18FS	DKQ-24FS	DKMQ24	DKMT18FS
$P_x = 1000$ $P_z = 0$	2 x 12	5.355	5.379	5.327	2.077	5.395	5.410
	4 x 24	5.371	5.447	5.367	6.328	5.401	5.543
	6 x 36	5.393	5.542	5.434	12.312		
	Ref.[B11]	$U_A = 5.424$					
$P_x = 0$ $P_z = 1000$	2 x 12	1.471	1.474	1.465	0.920	1.624	1.795
	4 x 24	1.621	1.640	1.621	2.049	1.711	1.893
	6 x 36	1.679	1.709	1.682	3.945		
	Ref.[B11]	$W_A = 1.754$					

7.7 Bentuk Kantilever Z Dengan Sudut Antara 90°



Gbr. 7.20 Bentuk Kantilever Z dengan Sudut Antara 90°

Data:

$$L = 10.0 \text{ m}; a = 1.0 \text{ m}; b = 2.0 \text{ m}; h = 0.10 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$S = 0.60 \text{ N}$ pada sepanjang CD dan EF

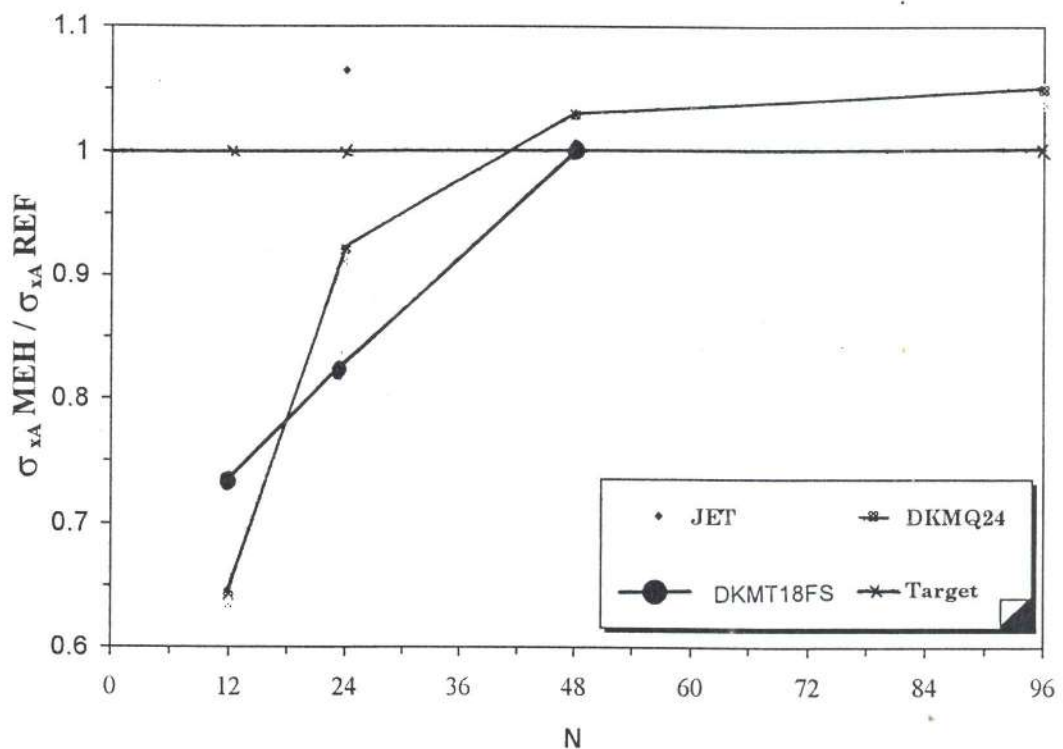
Kondisi batas:

$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ pada perletakan}$$

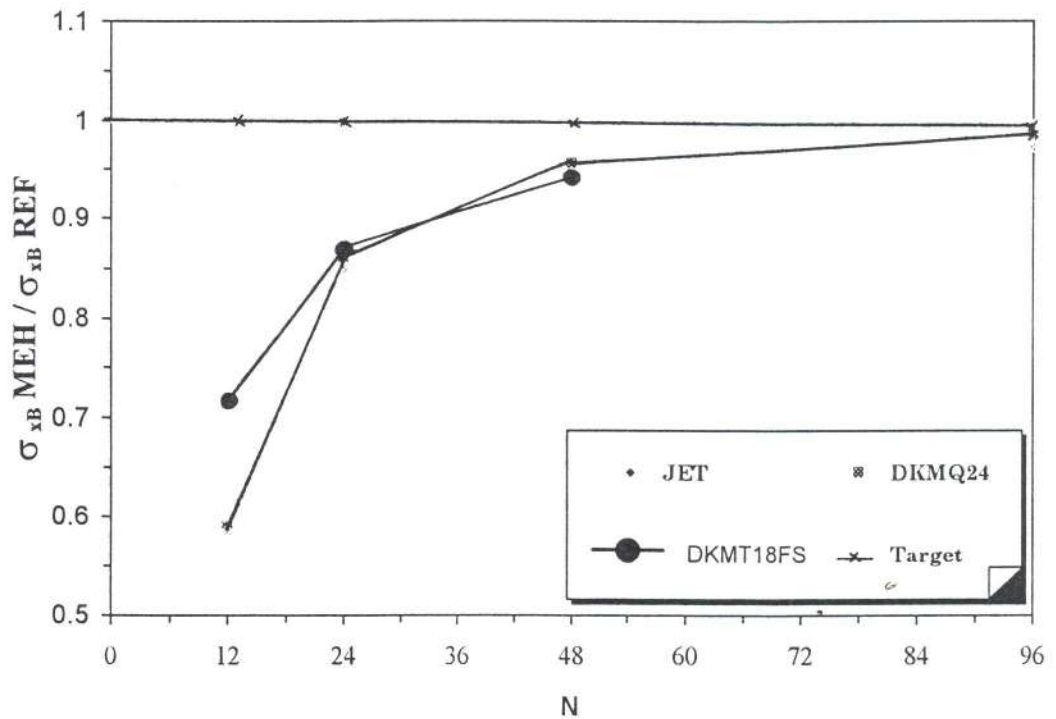
Kasus ini diambil dari Proposed NAFEMS Linear Benchmarks [Ref. D2]. Tujuan pengujian ini adalah mengevaluasi tegangan pada nodal.

Struktur merupakan sebuah kantilever tipis berbentuk Z, dengan sebuah sisi dijepit dan pada sisi lain bebas dan diberi torsi sebesar 1.20 Nm. Gambar struktur dapat dilihat pada gambar 7.20.

Mesh yang diusulkan adalah 3 x 8. Namun evaluasi ini juga memperlihatkan konvergensi dari 3 x 4 hingga 3 x 32 elemen. Presentasi tersebut terdapat pada gambar 7.21-22 dan tabel 7.8. Nilai referensi didapat dari solusi analitik [Ref. D2] yang disebut Target. Evaluasi JET hanya diperoleh pada mesh 3 x 8. Hasil DKMQ24 dan DKMT18FS baik untuk mesh lebih dari 3 x 8.



Gbr. 7.21 Konvergensi Tegangan arah X pada Titik A - Bentuk Kantilever Z, 90°



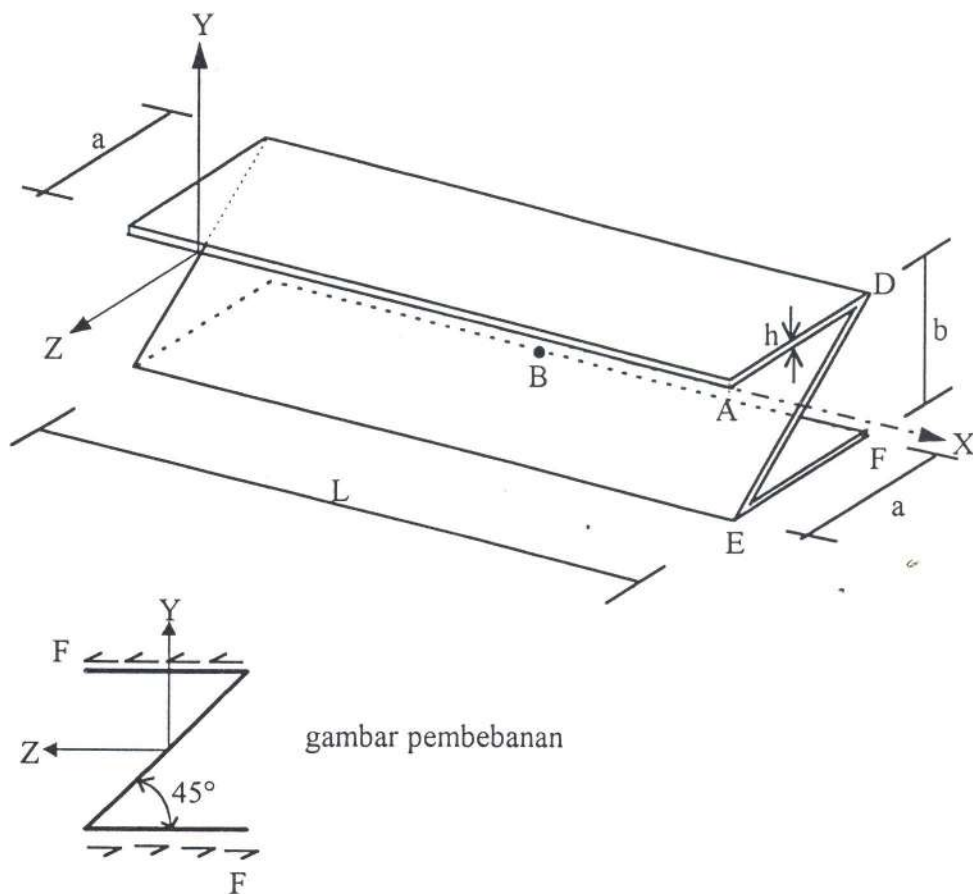
Gbr. 7.22 Konvergensi Tegangan arah X pada Titik B - Bentuk Kantilever Z, 90°

Tabel 7.8: Tegangan arah X pada Titik A dan B

Nilai Referensi dari solusi analitik Target [Ref. D1]: $\sigma_{xA} = 108$ dan $\sigma_{xB} = 36$.

N	Tegangan Arah x di Titik A			Tegangan Arah x di Titik B		
	JET	DKMQ24	DKMT18FS	JET	DKMQ24	DKMT18FS
3 x 4		66.239	78.895		21.232	26.050
3 x 8	115	99.360	88.599	36	31.021	31.502
3 x 16		110.074	107.106		34.434	33.522
3 x 32		113.270			35.435	

7.8 Bentuk Kantilever Z dengan Sudut Antara 45°



Gbr. 7.23 Bentuk Kantilever Z, 45°

Data:

$$L = 10.0 \text{ m}; a = b = 1.0 \text{ m}; h = 0.01 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

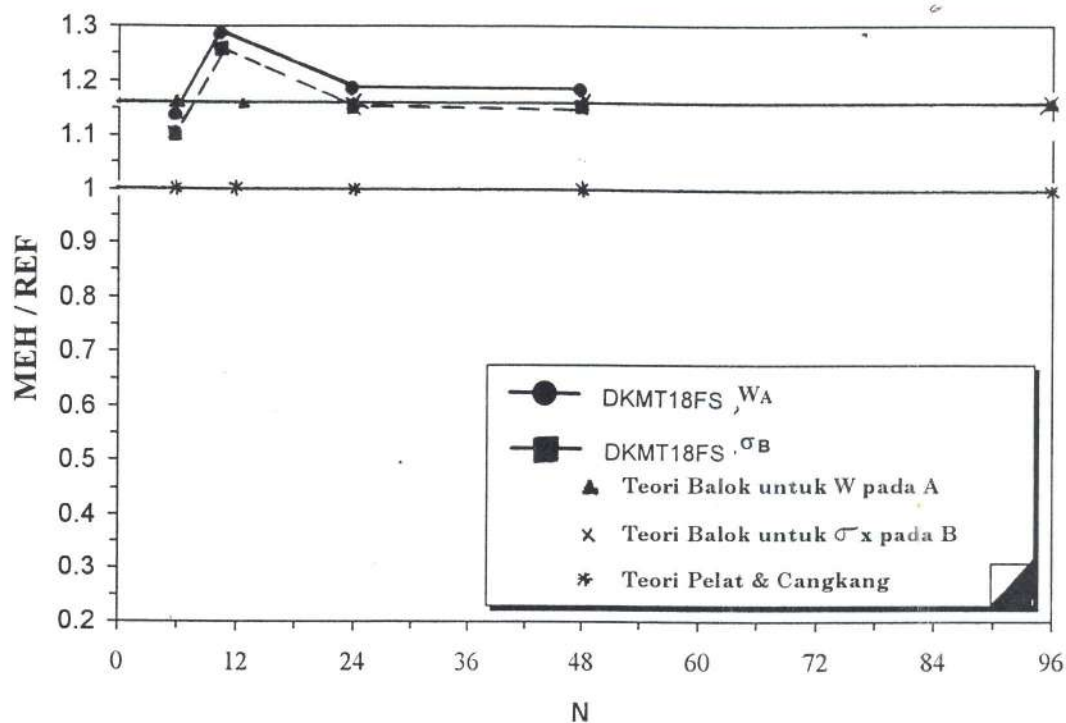
$$F_Z = 10^4 \text{ N pada sepanjang sisi AD dan EF}$$

Kondisi batas:

$$U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ pada perletakan}$$

Kasus ini diambil dari *Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures* [Ref. G2]. Struktur yang pada gambar 7.23 tersebut adalah sebuah kantilever tipis berbentuk Z dengan sudut antara sebesar 45° . Pada ujung satu dijepit dan pada ujung lainnya bebas dan diberikan gaya geser F_z sebesar 10^4 N.

Pengujian dilakukan dengan membagi struktur menjadi 3×2 , 3×4 , 3×8 , dan 3×16 . Hasil pengujian dapat dilihat pada gambar 7.24 dan tabel 7.9.



Gbr. 7.24 Konvergensi untuk Bentuk Kantilever Z, 45°

Tabel 7.9 Lendutan W_A dan σ_{xB}

Nilai referensi:

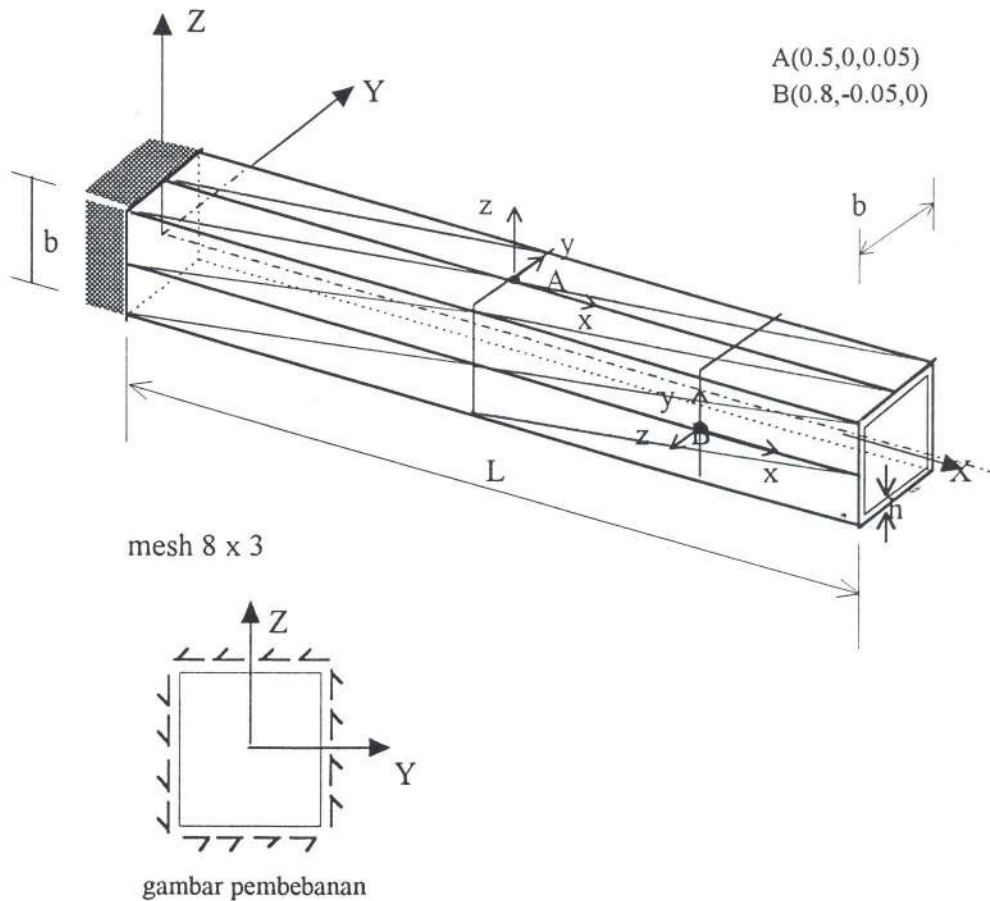
A. Teori Pelat dan Cangkang: $W_A = 7.15 \times 10^{-3}$ m dan $\sigma_{xB} = 6.52 \times 10^6$ Pa

B. Teori Balok Vlassov : $W_A = 8.34 \times 10^{-3}$ m dan $\sigma_{xB} = 7.67 \times 10^6$ Pa

N	W Pada A	σ_x Pada B
3 x 2	8.056E-03	7.350E+06
3 x 4	9.197E-03	8.669E+06
3 x 8	8.555E-03	7.865E+06
3 x 16	8.460E-03	7.643E+06

Keterangan : tegangan dinyatakan dalam sistem koordinat lokal

7.9 Bentuk Kantilever Kotak (Box Cantilever)



Gbr 7.25a Bentuk Kantilever Kotak (Box Cantilever)

Data:

$$L = 1.0 \text{ m}; b = 0.1 \text{ m}; h = 0.005 \text{ m}; E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}; \nu = 0.3$$

$M = 10 \text{ Nm}$ pada ujung bebas

Kondisi batas:

$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ pada perletakan}$$

Kasus ini juga diambil dari *Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures* [Ref. G2]. Struktur yang pada gambar 7.25 tersebut adalah sebuah kantilever tipis berbentuk kotak dengan ujung satu dijepit dan pada ujung lainnya bebas dan diberikan momen torsi sebesar 10 Nm.

Pengujian dilakukan dengan membagi struktur menjadi 8 x 3 dan 8 x 6. Pengujian menunjukkan hasil yang baik. Dan dapat dilihat pada tabel 7.10 berikut ini.

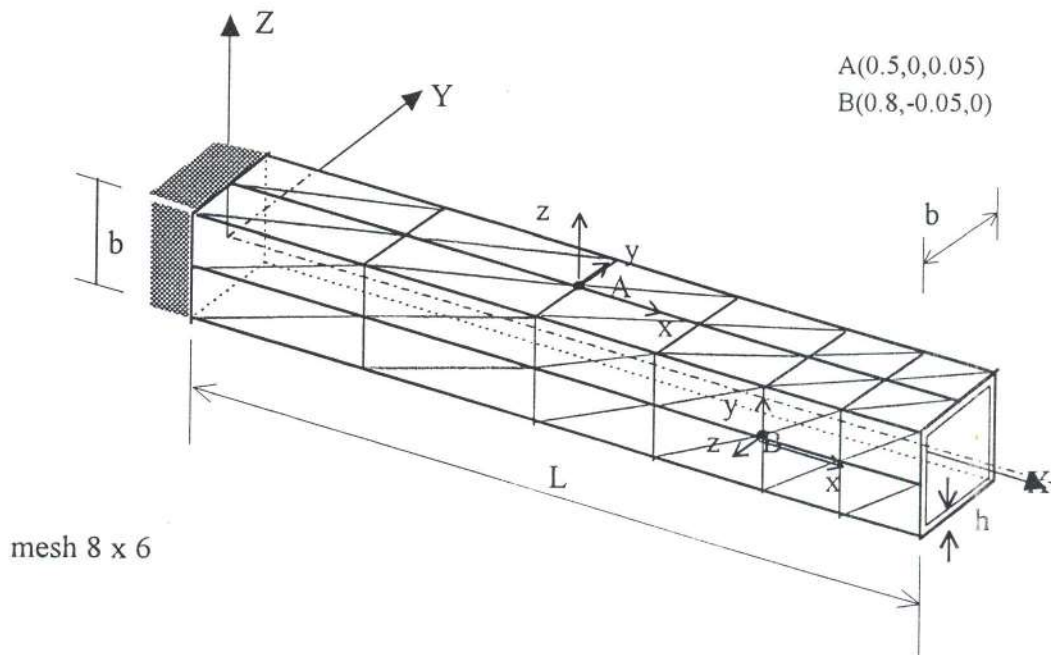
Tabel 7.10: Mesh 8 x 3 dan 8 x 6

Nilai referensi:

Pada nodal A: $V = -6.17 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\theta_x = 1.23 \times 10^{-5} \text{ rad}$, $\sigma_{xy} = -1.1 \times 10^5 \text{ Pa}$

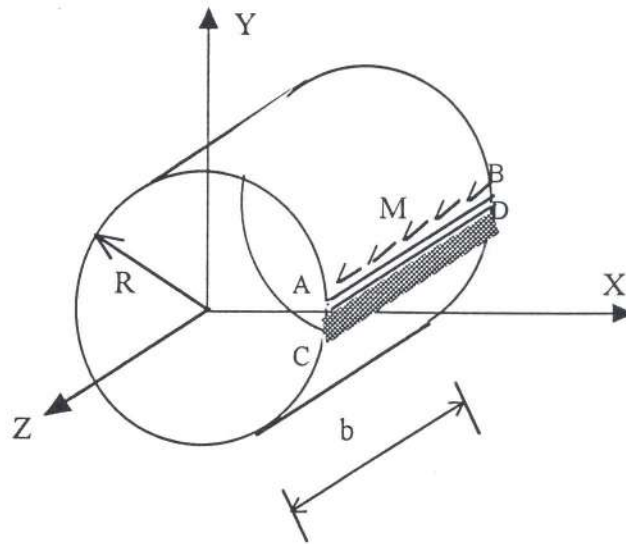
Pada nodal B: $W = -9.87 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\theta_x = 1.97 \times 10^{-5} \text{ rad}$, $\sigma_{xy} = -1.1 \times 10^5 \text{ Pa}$

N	Nodal A			Nodal B		
	V	θ_x	σ_{xy}	W	θ_x	σ_{xy}
8 x 3	-6.058E-07	1.234E-05	-1.103E+05	-9.871E-07	2.025E-05	-1.535E+05
8 x 6	-6.164E-07	1.234E-05	-1.019E+05	-9.861E-07	1.982E-05	-1.019E-05

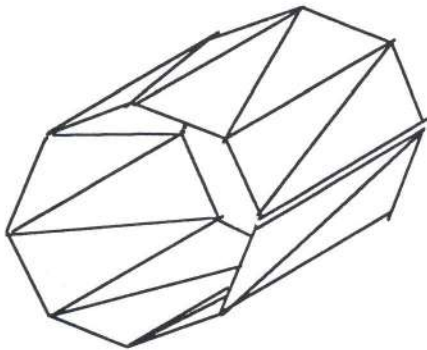


Gbr. 7.25b Bentuk Kantilever Kotak (Box Cantilever)

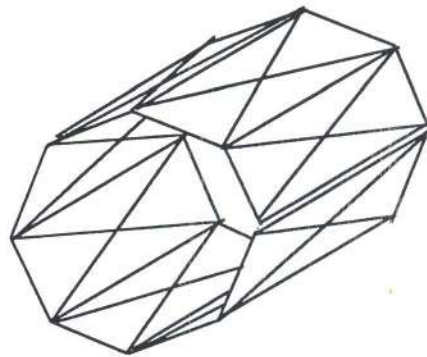
7.10 Bentuk Silinder Terbuka Dengan Beban Momen Lentur (Slit-Cylinder Bending)



(a) Deskripsi Masalah



(b) Mesh Diagonal Searah
(Cross-hatch Mesh)



(c) Mesh Diagonal Menyilang
(Cross-diagonal Mesh)

Gbr. 7.26 Bentuk Silinder Terbuka dengan Beban Momen Lentur (Slit Cylinder Bending)

Data:

$$R = 100.0; b = 2 \pi R / N; h = 1.0; \nu = 0.3$$

$$\text{Momen pada sisi AB: } M = 1.0$$

Kondisi batas:

$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ pada sisi CD}$$

Bentuk Silinder Terbuka (Slit Cylinder) dengan beban momen lentur (bending) dapat dilihat pada gambar 7.26. Ujung bawah (CD) dari silinder ini dijepit dan ujung (AB) yang lainnya diberi beban momen lentur.

Besarnya deformasi yang dihasilkan adalah tergantung jari-jari silinder. Pada sistem koordinat silinder (polar), momen lentur adalah konstan dan tegangan membran adalah nol pada seluruh silinder. Solusi lendutan pada ujung bebas (AB) adalah:

$$V = 2 \pi R^2 \frac{M}{D}$$

$$\theta = 2 \pi R \frac{M}{D}$$

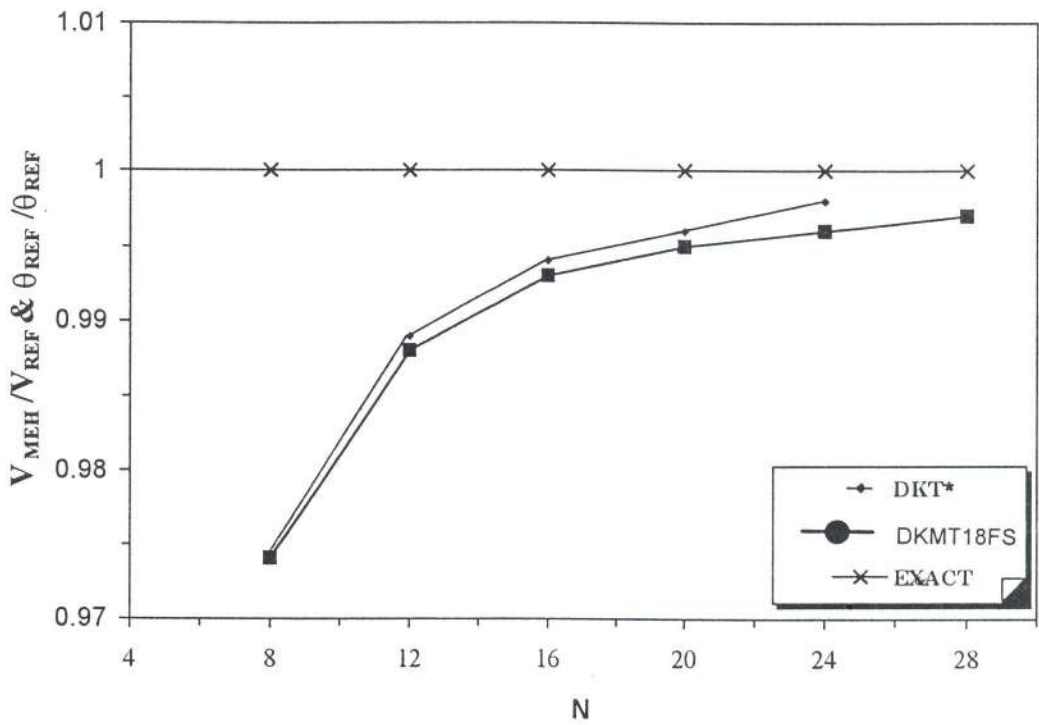
$$D = \frac{E b h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

dimana V adalah lendutan tangensial dan θ adalah rotasinya.

Analisa Metode Elemen Hingga menggunakan dua macam pola yang berbeda untuk elemen segitiga, seperti gambar 7.26b dan c. Semua nodal pada elemen terletak pada bidang silinder; dan nodal tengah pada mesh untuk elemen segitiga terletak pada pertemuan diagonal silangnya.

Hasil perbandingan lendutannya dipresentasikan pada tabel 7.11-12 dan gambar 7.27-28. Semua jenis DKT (DKT-CST, DKT-CST*, DKT-LR, DKT-CST-15, DKT-CST-15RB) memberikan hasil yang sama untuk mesh diagonal searah (Cross-hatch Mesh). Untuk semua elemen, termasuk DKMT18FS, gaya dalam momen lenturnya eksak, tegangan membrannya nol dan kesalahan yang relatif kecil terjadi pada lendutan.

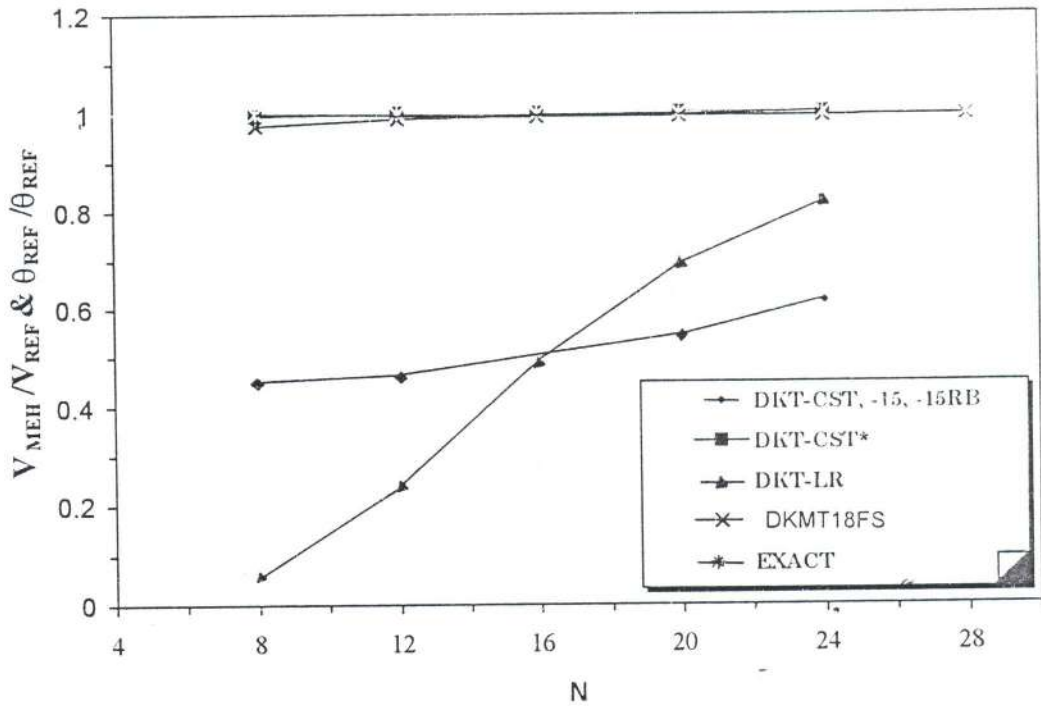
Hasil perbandingan lendutan untuk mesh diagonal menyilang (Cross-diagonal Mesh) dipresentasikan pada gambar 7.28. Hasil yang baik hanya pada elemen DKT-CST* dan elemen DKMT18FS. Untuk kedua elemen ini, gaya dalam momen lenturnya eksak, tegangan membrannya nol dan kesalahan yang relatif kecil terjadi pada lendutan.



Gbr. 7.27 Konvergensi V dan θ Mesh Diagonal Searah

Tabel 7.11 Konvergensi V dan θ - Mesh Diagonal Searah

N	DKT-CST, DKT-CST*, DKT-LR, DKT-CST-15, DKT-CST-15RB V dan θ	DKMT18FS V dan θ
8	0.974	0.974
12	0.989	0.989
16	0.994	0.994
20	0.996	0.996
24	0.998	0.997
28		0.998



Gbr. 7.28 Konvergensi V dan θ - Mesh Diagonal Menyilang

Tabel 7.12 Konvergensi V dan θ - Mesh Diagonal Menyilang

N	DKT-CST, DKT-SCT-15, DKT-CST-15RB V dan θ	DKT-CST* V dan θ	DKT-LR V dan θ	DKMT18FS V dan θ
8	0.454	0.994	0.064	0.974
12	0.462	0.999	0.247	0.989
16	0.490	1.000	0.498	0.994
20	0.543	1.001	0.698	0.996
24	0.615	1.002	0.822	0.997
28				0.998

Berdasarkan hasil pengamatan, dapat ditarik kesimpulan elemen DKT-CST* dan DKMT18FS sangat efektif. Namun elemen DKT-CST, DKT-LR, DKT-CST-15 dan DKT-CST-15RB akan menghasilkan nilai yang baik, jika titik pertemuan diagonal pada setiap 4 elemennya berada pada bidang silinder. Hal ini dikemukakan oleh H. Stolarski *et al* [Ref. S3].

BAB VIII

KESIMPULAN DAN SARAN

8.1. KESIMPULAN

Dengan menggunakan Metode Elemen Hingga, maka analisa perilaku struktur-struktur yang penting dengan pembebanan dan bentuk geometri yang kompleks akan menjadi lebih mudah untuk diselesaikan.

Pendekatan elemen cangkang faset (facetted shell element) dalam memformulasikan struktur cangkang dengan enam derajat kebebasan per nodal merupakan suatu pendekatan yang sederhana, di mana penggabungan elemen membran dan elemen bending dapat dilakukan dengan superposisi langsung. Dalam penelitian ini, kami gunakan elemen membran Allman dan elemen pelat bending DKMT. Hasil penggabungannya diberi nama DKMT18FS.

Evaluasi elemen DKMT18FS menunjukkan karakteristik sebagai berikut :

1. Dapat digunakan untuk kasus cangkang tipis maupun tebal.
2. Dapat merepresentasikan Gerak Benda Kaku dengan memuaskan, dan tidak memiliki Spurious Mode.
3. Memenuhi semua kriteria uji konvergensi kecuali untuk struktur dengan elemen yang terpilin dimana pengaruh faktor warpingnya dominan.
4. Tidak ada Shear Locking dan Membrane Locking untuk kasus cangkang tipis.

8.2 SARAN

Dengan melihat hasil yang didapat , maka Elemen DKMT18FS ini dapat dikembangkan untuk :

1. Cangkang komposit dengan tipe pembebanan statik dan dinamik
2. Kasus non-linier untuk geometri dan material.
3. Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik pada struktur dimana faktor warpingnya dominan, maka faktor warping harus diperhitungkan dengan pendekatan konuitas normal.

DAFTAR PUSTAKA

- [A1]. ALLMAN, D.J.,
A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, Computer & Struktur, vol. 19, No.2, p.1-8, 1984.
- [A3]. AALTO, J.
From Kirchhoff to Mindlin plate elements,
Communications in Applied Numerical Methods, Vol.4, 231-241 (1988).
- [A4]. AYAD, R., BATOZ, J.L., DHATT, G., KATILI, I.,
A study of recent triangular elements for thin and thick plates,
In New advances in computational structural mechanics, Eds. Ladeveze and Zienkiewicz, p.259-271, (1992).
- [B2]. BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, (1982).
- [B3]. BATHE, K.J. and WILSON, E.L., "Numerical Method in Finite Element Analysis", Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, (1978).
- [B4]. BATOZ, J.L., and DHATT, G., "Modelisation des Structures Par Element Finis", Vol. 1: Solides Elastiques, Vol. 2: Poutre et Plaques", Edition Hermes, Paris, (1990).
- [B5]. BATOZ, J.L. & LARDEUR, P., *A Discrete Shear Triangular Nine DOF Element for the Analysis of Thick to Very Thin Plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, hal. 533-560, New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [B6]. BATOZ, J.L. & I. KATILI, *On a Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 35, hal. 1603-1632, New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [B7]. BATOZ, J.L., K.J. BATHE, & L.W. HO, *A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, hal. 1771-1812, New York: John Wiley & Sons, 1980.

- [B8]. BATOZ, J.L. & M. BEN TAHAR, *Evaluation of a New Thin Plate Quadrilateral Element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, hal. 1655-1678, New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [B9]. BHASKAR, K., & T.K. VARADAN, *Analytical Solution for a Pinched Laminated Cylinder*, Journal of Applied Mechanics, vol. 57, hal. 1082-1083, 1990.
- [B10]. BREBBIA, C.A., & J.J. CONNOR, *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [B11]. BATOZ, J.L., & S. TRIKI, *Developpement d'un Element Fini de Poutre Vrillee*, Internal Report, UTC/LG2MS/MNM, Oktober 1991.
- [B12]. BOUABDALLAH, M. S., *Modelisation de Coques Cyndriques Raidies, Isotropes et Composites*, Tesis Presentasi Strata III di UTC, Perancis: 1992.
- [B13]. BAHUAUD, J., & G. VIALATON, *Flexion et Torsion des Poutres a Parois Minces et a Sections Droites Ouvertes*, INSA-Lyon/CTICM, 1980.
- [C1]. CARPENTER, N., STOLARSKY, H., BELYTSCHKO, *A flat triangular shell element with improved membrane interpolation*, Communications in applied numerical methods, vol.1, p.161-168 (1985).
- [C2]. COOK, R.D., MARKUS, D.S., PLESHA, M.E, "*Concept and Applications of Finite Element Analysis Third Edition*", John Wiley & Sons Inc.,(1989).
- [C3]. CLOUGH, R.W. and TOCHER, J.L., "*Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending*", Proc. Conf. on Matrix Methodes in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, WPAFB,Ohio, (1966).
- [C4]. COURANT, R., "*Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, ,pp. 1-23, (1943).
- [C5]. CARPENTER, N., H. STOLARSKI, & T. BELYTSCHKO, *Improve-ments in 3-node Triangular Shell Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 23, hal. 1643-1667, New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [D1]. DESAI, C., "*Dasar-dasar Metode Elemen Hingga*", Erlangga,(1988).
- [D2]. DAVIES, G.A.O., *Proposed NAFEMS Linear Benchmarks*, NAFEMS Publications, Glasgow: April 1986.

- [E1]. EULER, L., "*De Motu Vibratio Tympanorum*", Novi Commentary Acad. Petropolit, 10, (1766).
- [F1]. FLUGGE, W., *Stresses in Shells*, Springer Verlag, 1960.
- [G1]. GREENE, B.E., STROME, D.R., WEIKEL R.C.,
Application of the stiffness method to the analysis of shell structures. In Proc. Aviation Conference of ASME, Los Angeles, CA, March 1961.
- [G2]. ---, *Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures*, no.4-5, hal. 62-65, Paris: Afnor, SFM, 1989.
- [H1]. HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., *The linear triangular bending element*, Mathematics of finite elements and application IV MAFELAP 1981.
- [J1]. JAAMEI, S., Ph. JETTEUR, & F. FREY, *Numerical Tests with the JET Shell Element; Part I: Introduction and Introductory Tests*, IREM Internal Report 87/9, Lausanne: Swiss Federal Institute of Technology, September 1987.
- [K1]. KIRCHHOFF, G., "*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Schiebe*", J. Reine und Angewandte Mathematic, 40, (1850).
- [K2]. KATILI, I., "*A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based On Mindlin-Reissner Plate Theory And Assumed Shear Strain Fields-Part I: An Extended DKT Element For Thick-Plate Bending Analysis*", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 36, 1885-1908, (1993).
- [K3]. KATILI, I., *Formulation et Evaluation des Nouveaux Elements Finis pour L'Analyse Lineaire des Plaques et Coques de Forme Quelconque*, Tesis Presentasi Strata III di UTC, Perancis: 1993.
- [K4]. KANG, D.S., & T.H.H. PIAN, *A 20-DOF Hybrid Stress General Shell Element*, Computers & Structures, vol. 30, no. 4, hal. 789-794, Inggris: 1988.
- [L1]. LOVE, A.E.H., "*A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*", Dover Publication, Inc., New York, (1944).
- [L2]. LARDEUR, P., *Developpements et Evaluation de Deux Nouveaux Element Finis de Plaques et Coques Composites avec Influence du Cisaillement Transversal*, Tesis Presentasi Strata III di UTC, Perancis: 1990.
- [L3]. LINDBERG, G.M., M.D. OLSON, & G.R. COWPER, *New Developments in the Finite Element Analysis of Shells*, Q. Bull. Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada, vol. 4, 1969.

- [M1]. MINDLIN, R.D., "*Influence of Rotary Inertia and Shear in Flexural Motions of Elastic Plates*", Journal of Applied Mechanics, 18,(1951).
- [M2]. MACNEAL, R.H. and HARDER, R.L.,
A refined four nodes membrane element with rotational degrees of freedom, Computer & Structures, 28, 75-84 (1988).
- [M3]. MORRIS, A.J., *A Summary of Appropriate Governing Equations and Functionals in the Finite Element Analysis of Thin Shells*, Finite Element for Thin Shells and Curved Members, editor: Ashwell & Gallagher, hal. 15-39, New York: John Willey & Sons, 1976.
- [M4]. MACNEAL, R.J. & R.L. HARDER, *A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy*, Finite Element Analysis and Design, vol. 1, hal. 3-20, 1985.
- [R1]. REISSNER, E., "*The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*", Journal Applied Mechanics, 12,(1945).
- [S1]. SZILARD, R., DR.-ING., PE., "*Teori dan Analisa Pelat - Metode Klasik dan Numerik*", Erlangga, (1989).
- [S2]. SCORDELIS, A.C. & K.S. LO, *Computer Analysis of Cylindrical Shells*, Journal of American Concrete Institute, vol. 61, hal. 539-561, 1969.
- [S3]. STOLARSKI, H., *et al*, *A Simple Triangular Curved Shell Element*, Engineering Computation, vol. 1, hal. 210-218, 1984.
- [T1]. TURNER, M.J., CLOUGH, R.W., MARTIN, G.C., and TOPP, L.J., "*Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*", J.Aeron. Sci., 23 (Sept. 1956), 805-823.
- [T2]. TODHUNTER, I., and PEARSON, K., "*A History of the Theory of Elasticity*", Vol. 1 dan 2, Dover Publications, Inc., New York, (1960).
- [T3]. TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY, S., KRIEGER, HINDARKO, S., "*Teori Pelat dan Cangkang*", Edisi kedua, Erlangga.
- [W1]. WASHIZU, K., "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", 3rd Edition, Pergamon, (1982).
- [W2]. WEAVER, W.JR., JOHNSTON, P.R., "*Elemen Hingga untuk Analisis Struktur*", PT Eresco, Bandung, (1989).

- [Z1]. ZIENKIEWIECZ, O.C. and TAYLOR, R.L., "*The Finite Element Method -4th Edition*", Vol.1: Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill International, Singapore, (1989).
- [Z2]. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., PAPADOPOULOS, P., ONATE, E., Plate bending elements with discrete constraints; new triangular elements, *Computer & Structures*, vol. 35, no.4, pp.505-522 (1990).

Singkatan :

- CMAME : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
(North Holland Publishing Company).
- IJNME : International Journal for Numerical Methods in Engineering (John Wiley).
- JAM : Journal of Applied Mechanics (ASME).
- AIAA : American Institute for Aeronautics Journal.