

Kontrol Kualitas Proses Kompleks

**Teknik Statistik Mutakhir
Disertai Penerapannya di Berbagai Profesi dan Bisnis**

*Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques
with their application in various professions and businesses*



Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindiati



**ITB
Press**

KONTROL KUALITAS PROSES KOMPLEKS:

*Teknik Statistik Mutakhir
Disertai Penerapannya di Berbagai Profesi dan Bisnis*

*Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques
with their application in various professions and businesses*

Kontrol Kualitas Proses Kompleks

**Teknik Statistik Mutakhir
Disertai Penerapannya di Berbagai Profesi dan Bisnis**

*Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques
with their application in various professions and businesses*



Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindiati



**ITB
Press**

Hak cipta © pada penulis dan dilindungi Undang-Undang

Hak penerbitan pada ITB Press

Dilarang mengutip sebagian ataupun seluruh buku ini dalam bentuk apa pun tanpa izin dari penerbit.

KONTROL KUALITAS PROSES KOMPLEKS: Teknik Statistikal Mutakhir

Disertai Penerapannya di Berbagai Profesi dan Bisnis

*Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques
with their application in various professions and businesses*

Penulis : Maman A. Djauhari
Dyah E. Herwindiati

Editor : Rina Lestari

Desainer : Yuda A. Setiadi

Cetakan ke 1 : 2022

ISBN : 978-623-297-256-8



Gedung Perpustakaan Pusat ITB
Lantai Basement, Jl. Ganesha No. 10
Bandung 40132, Jawa Barat
Telp. 022 2504257/022 2534155
e-mail: office@itbpress.itb.ac.id
web: www.itbpress.itb.ac.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

*Buku ini didedikasikan kepada mereka yang berjuang mencerdaskan kehidupan Bangsa
Indonesia dan membangun Negara Bangsa Indonesia yang berkualitas tinggi*

Maman A. Djauhari
Dyah E. Herwindati



UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis pertama sangat berterima kasih kepada (Alm) Profesor Dr. Achmad Arifin, Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung, Indonesia, untuk diskusi tentang “Formula 10K Jam” dalam Budaya Riset dan Budaya Publikasi, 36 tahun sebelum Malcolm Gladwell membahas formula tersebut dalam bukunya “Outliers.” Buku *best-selling* ini diterbitkan pada tahun 2008 oleh Penerbit Little, Brown and Company, New York.

Ucapan terima kasih khusus disampaikan kepada Profesor Emeritus Dato’ Dr. Hj. Kamel Ariffin Mohd Atan, Direktur *Institute for Mathematical Research* (INSPEM), Universiti Putra Malaysia, periode 1 April 2002 sampai dengan 15 Februari 2016 dan Profesor Dr. Noor Akma Ibrahim, Direktur INSPEM berikutnya, atas kesempatan yang diberikan kepada penulis pertama untuk menjadi bagian dari INSPEM sejak September 2014 sampai September 2016.

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dari penulis kedua disampaikan kepada Universitas Tarumanagara dan Fakultas Teknologi Informasi Universitas Tarumanagara, Indonesia, atas kesempatan yang diberikan untuk berkontribusi dalam penelitian ini.

Kami berdua sangat berhutang budi kepada Profesor Dr. Yves Escoufier, Université Montpellier II, Prancis, untuk diskusi mendalam mengenai pemaknaan geometrikal dari statistik *VF*.

Maman A. Djauhari

Dyah E. Herwindiati

SEKAPUR SIRIH

Proposal satu halaman yang diajukan oleh Walter Andrew Shewhart ke Western Electric Company pada 16 Mei 1924 adalah karya rintisan orisinal yang mengubah total dunia industri; cara industri berfikir dan memperlakukan diri mereka sendiri. Itulah karya yang merupakan cikal bakal dari apa yang sekarang kita sebut diagram kontrol. Dalam perkembangannya, diagram ini telah mengubah paradigma tentang cara industri berurusan dengan proses produksi. Diagram tersebut adalah alat untuk membedakan variasi yang disebabkan oleh sifat kerandoman data (*common-cause variation*, disingkat CCV) dari variasi yang disebabkan oleh adanya “gangguan” pada proses produksi dan harus dicari penyebabnya (*assignable-cause variation*, disingkat ACV). Tujuan pembuatan diagram itu adalah untuk (1) memvisualkan kinerja proses, dan (2) membawa proses ke keadaan terkontrol. Keadaan terkontrol adalah keadaan di mana variasi yang timbul hanya disebabkan oleh adanya CCV. Dan, menjaga proses dalam keadaan seperti ini adalah dambaan para profesional bidang kualitas untuk memprediksi apa yang akan terjadi di masa depan.

Dalam proposalnya, Shewhart hanya menggunakan satu (*single*) karakteristik (*critical to quality*, disingkat CTQ) sebagai penentu kualitas proses produksi. Teknik ini sekarang disebut *univariate statistical process control*, disingkat UVSPC. Pada waktu itu, Shewhart memperkenalkan jargon berikut yang menjadi sangat terkenal: “Kualitas berbanding terbalik dengan variabilitas.” Artinya, upaya meningkatkan kualitas proses adalah upaya mengurangi variabilitas proses. Dalam kata-kata William Edwards Deming, seperti dikutip dalam Neave (1990), “Jika saya harus memberikan pesan singkat kepada manajemen, dalam beberapa kata saja, saya akan mengatakan bahwa untuk meningkatkan kualitas, kurangilah variabilitas.”

Sekitar satu dekade setelah proposal Shewhart, Harold Hotelling memperkenalkan “distribusi *T-Squared*” yang merupakan generalisasi dari distribusi student-*t* yang diperlukan tat kala kita berhadapan dengan statistik multivariat. Perpaduan karya Shewhart dengan inovasi Hotelling ini telah melahirkan teknik baru yakni teknik pengendalian kualitas proses kompleks. Yang dimaksud dengan proses kompleks adalah proses di mana kualitas proses ditentukan oleh dua atau lebih karakteristik yang berkorelasi (2 atau lebih CTQs). Dalam literatur statistika, teknik ini disebut *multivariate statistical process control*, disingkat MVSPC.

Buku ini adalah literatur khusus yang fokus pada MVSPC dan lebih khusus lagi pada pengendalian variabilitas proses kompleks. Mengapa variabilitas dikhususkan? Ada dua alasan utama.

Pertama, variabilitas sulit dipahami dan karenanya sulit diukur; artinya, sulit dikelola. Di lain pihak (ini penting dicatat), variabilitas proses dan/atau produk lebih mudah dirasakan ketimbang parameter lainnya seperti rata-rata (*mean*). Itulah sebabnya mengapa variabilitas sangat istimewa dalam literatur statistika (General Electric (1998) dan Snee (2006)). Bahwa variabilitas sulit untuk dikelola tetapi penting dijelaskan oleh Lara Boyd, seorang peneliti otak di University of British

Columbia, Vancouver, Kanada. Dalam *TEDx Talks*, yang diterbitkan pada 15 Desember 2015, Boyd berkata: “Sebagai seorang peneliti, variabilitas telah membuatku gila. Variabilitas membuat sulit penggunaan statistik untuk menguji data dan ide Anda. Oleh karena itu, studi intervensi medis secara khusus dirancang untuk meminimalkan variabilitas.” Lebih lanjut, dia menambahkan, “Dalam penelitian saya, jelas sekali bahwa data yang paling informatif yang kami kumpulkan, menunjukkan variabilitas tersebut.” – <https://www.youtube.com/watch?v=LNHBMFCzznE> (diakses pada 15 Maret 2018).

Kedua, seperti yang dikatakan Hoerl dan Snee (2012), memahami variabilitas harus menjadi kompetensi inti para ahli statistik dan semua profesional bidang kualitas. Mereka harus berpikir secara mendalam tentang variabilitas disertai pengaruhnya.

Berikut ini, kita akan mulai dengan diskusi singkat tentang praktik pengendalian variabilitas proses saat ini. Pengendalian parameter ini sama pentingnya dengan pengendalian target proses, namun menuntut perhatian khusus mengingat kosa-kata matematikanya agak khusus, terutama dalam kaitannya dengan (1) operasi matriks pada perhitungan statistik pengontrol, dan (2) perilaku distribusi statistik pengontrol untuk menentukan batas-batas kontrol (batas-batas toleransi). Tak dapat dipungkiri dan dihindari bahasa matematik/statistik adalah bahasa pergaulan dalam dunia variabilitas data khususnya dan *Data Science* umumnya.

1. Tradisi MVSPC saat ini

Para manajer kualitas dan para profesional bidang kualitas setuju bahwa variabilitas proses dan target proses sama pentingnya dalam proses produksi (Montgomery (2005, 2009)). Kedua parameter itu harus dikontrol terus menerus. Namun, pada saat ini, yang pertama (variabilitas proses) kurang mendapat perhatian dibandingkan dengan yang terakhir (target proses). Hal ini terutama disebabkan oleh fakta bahwa setiap ukuran skalar tidak dapat menjelaskan kompleksitas dari variabilitas proses kompleks.

Metode statistik untuk pengendalian target proses kompleks sudah mencapai perkembangan yang sangat matang dengan statistik T^2 sebagai tumpuan utamanya. Tidak demikian halnya dengan pengendalian variabilitas proses kompleks. Seperti yang dikatakan oleh Reis dan Rato (2013), alat yang paling banyak digunakan untuk mengontrol variabilitas proses kompleks adalah diagram kontrol berbasis *Generalized Variance* (disingkat *GV*). Namun, sangat disayangkan, seperti yang akan dibahas mulai Bab 8, diagram ini memiliki keterbatasan yang serius. Hal ini telah memotivasi Djauhari dkk. (2008) untuk mengembangkan diagram kontrol *Vector Variance* (disingkat *VV*). Diagram ini diperlukan sebagai komplemen dari diagram kontrol *GV*. Jadi, kedua diagram ini saling melengkapi. Oleh karena kedua diagram tersebut di atas saling melengkapi satu sama lain, para pembaca disarankan untuk menggunakannya secara bersamaan. Bagi pembaca yang berminat, diskusi tentang diagram kontrol *VV* juga dapat dilihat di buku Ryan (2011).

2. Keluar dari tempurung (*Go out of the box*)

Buku ini mengajak para pembaca untuk keluar dari tempurung (*Go out of the box*) menuju ke dunia MVSPC yang jauh lebih luas. Itulah sebabnya mengapa isi buku ini sangat unik dan sulit mencari pembandingnya. Keunikannya terletak pada:

1. Praktek MVSPC, baik pengontrolan target proses maupun pengontrolan variabilitas proses, saat ini didasarkan kepada dua skenario sampling, yakni (1) berbasis observasi individual, dan (2) berbasis sub-grup dengan ukuran konstan. Dalam buku ini, kedua skenario pengontrolan itu dikembangkan menjadi empat; (1) berbasis observasi individual, (2) berbasis sub-grup dengan ukuran konstan, (3) berbasis sub-grup dengan ukuran tak konstan, dan (4) berbasis CTQ yang berbeda baik dalam jenisnya dan/atau jumlahnya.
2. Apabila saat ini MVSPC identik dengan industri manufaktur, dengan menggunakan skenario ketiga, dalam buku ini wilayah aplikasi MVSPC dikembangkan sehingga meliputi industri jasa; termasuk proses layanan publik seperti proses layanan Rumah Sakit, proses pedidikan, proses belajar mengajar, dll. Artinya, MVSPC tidak hanya dapat dinikmati oleh mereka yang berlatar belakang sains natural (SN) saja akan tetapi juga oleh sains sosial (SS).
3. Skenario keempat lebih jauh membuka peluang mengontrol variabilitas berbagai proses kompleks dalam SS dengan CTQ yang berbeda. Ini serupa dengan pengontrolan *short run production process* di dalam SN.
4. Keunikan lainnya adalah pada penyelesaian masalah komputasi. Penerapan semua teknik MVSPC yang disajikan dalam buku ini tidak memerlukan perangkat lunak statistik yang besar; cukup dengan MS Excel.

Dengan berbagai keunikan itu, diharapkan semakin banyak dan luas kalangan yang dapat menikmati teknik-teknik MVSPC untuk kepentingan kemajuan Bangsa Indonesia.

Buku ini diharapkan bukan hanya menjadi pegangan para profesional bidang Q-STEM (*Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering, dan Quality Management*). Akan tetapi juga menjadi sumber informasi terkini bagi Dosen, Mahasiswa, Peneliti, dan mereka yang haus akan pemenuhan hasrat intelektual dalam memberikan kontribusi kepada kehidupan Bangsa dan Negara Indonesia yang lebih cerdas (sesuai Alinea keempat, Pembukaan UUD 1945) dan berkualitas tinggi.

Akhir kata, buku ini (terdiri atas 17 bab disertai 41 buah contoh penerapannya dengan 33 gambar, 75 tabel data, dan 4 tabel statistik) kami persembahkan khusus untuk Hari Ulang Tahun Ibu Pertiwi sebagai Negara Bangsa Indonesia yang ke-77 pada tanggal 17 Agustus 2022.

Selamat menikmati petualangan intelektual yang indah bersama kami!

Bandung, 17 Agustus 2022

Maqnan A. Djauhari
Dyah E. Herwindiati

BRIEF DESCRIPTION OF THE BOOK

Life is a complex process. Therefore, complex process is everywhere and all the time. Let say, for example, from the service process (e.g., at government offices, the education process, the teaching and learning process, the banking service process, etc.) to the engineering process and any process. The quality of all these processes must be controlled. But, how? Statistics provides methods and techniques to do that.

This book entitled "Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques and their application in various professions and businesses" presents the latest techniques needed by those who put quality at the first priority in their profession or business. It consists of 17 chapters with 41 examples of application from various fields, 33 figures, 75 data tables, and 4 statistical tables. It is published as a special gift for the 77th Independence Day of the Nation State of Indonesia on 17 August 2022.

This book is unique. Its uniqueness lies in the fact that:

1. The current practice of controlling complex processes is based on two sampling scenarios, namely (1) based on individual observations, and (2) based on sub-groups of constant-size. In this book, these two control scenarios are developed into four, (1) based on individual observations, (2) based on sub-groups of constant-size, (3) based on sub-groups of non-constant size, and (4) based on different CTQs in terms of type and/or number.
2. Traditionally, complex process has been identical with production process in manufacturing industry. However, using the third scenario, in this book, complex process control techniques are developed so that its application areas include the service industry and public services, e.g., education service and hospital service. Thus, this book can be enjoyed by a wider audience; both natural science (SN) and social science (SS) based professions and businesses.
3. The fourth scenario, further, opens up opportunities to control SS-based complex processes with different CTQs. This is similar to controlling the short run production process in SN-based complex processes.
4. Another uniqueness is in solving computational problems. The application of all the techniques presented in this book does not require sophisticated statistical software; MS Excel is enough.
5. This book is written with a ready to implement concept and is very user friendly without neglecting the solid basic concepts. The readers are facilitated with the ready to use algorithms. Furthermore, each chapter is self-contained. Thus, the readers could start to read the book at any chapter they want; that chapter is independent from the others.

With this variety of uniqueness, it is hoped that more and more professional and business circles can enjoy SPC (Statistical Process Control) for the benefit of the progress of the Indonesian nation.

This book is expected not only to be a guide for professionals in the field of Q-STEM (Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering, and Quality Management) but also a source of up-to-date information and guidance for Lecturers, Students, Researchers, and those who are thirsty for the fulfillment of intellectual desires in contributing to the smarter and better life of the Indonesian Nation State (as stated in the fourth paragraph, Preamble to the 1945 Constitution).

Maman A. Djauhari

Dyah E. Herwindiati

DAFTAR SINGKATAN

ACV:	<i>assignable-cause variation</i>
ADS:	<i>augmented data set</i>
BIG:	<i>business, industry & government</i>
CCV:	<i>common-cause variation</i>
CLT:	<i>central limit theorem</i>
CTQ:	<i>critical to quality</i>
EV:	<i>effective variance</i>
EVV:	<i>effective vector variance</i>
GV:	<i>generalized variance</i>
HDS:	<i>historical data set</i>
IC:	<i>in-control</i>
IGV:	<i>improved generalized variance</i>
LCL:	<i>lower control limit</i>
MPT:	<i>multivariate process target</i>
MPV:	<i>multivariate process variability</i>
MVE:	<i>minimum volume ellipsoid</i>
MVSPC:	<i>multivariate statistical process control</i>
NYSE:	<i>New York Stock Exchange</i>
Obs.:	<i>observation</i>
OOC:	<i>out-of-control</i>
PDF:	<i>probability density function</i>
PFA:	<i>probability of false alarm</i>

Q-STEM:	<i>Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering & Quality Management</i>
RGV:	<i>relative generalized variance</i>
SN:	<i>natural sciences</i>
SPC:	<i>statistical process control</i>
SRGV:	<i>square root of generalized variance</i>
SS:	<i>social sciences</i>
SS1:	<i>sum of squares of all elements of $\bar{S}$</i>
SS2:	<i>sum of squares of all elements of the squared of $\bar{S}$ ($\bar{S}^2$)</i>
TV:	<i>total variance</i>
UCL:	<i>upper control limit</i>
UVSPC:	<i>univariate statistical process control</i>
VV:	<i>vector variance</i>

SIMBOL MATEMATIK

$Beta(p,q)$:	<i>distribusi Beta dengan derajat kebebasan p dan q</i>
e :	<i>bilangan natural</i>
$E(\dots)$:	<i>Ekspektasi dari ...</i>
$F(p,q)$:	<i>distribusi Fisher F dengan derajat kebebasan p dan q</i>
n :	<i>ukuran sampel (sub-grup)</i>
N :	<i>banyak data keseluruhan (total)</i>
$N(0,1)$:	<i>distribusi normal standar</i>
$N(\mu, \sigma^2)$:	<i>distribution normal dengan mean μ dan deviasi standar σ</i>
$N_p(\mu, \Sigma)$:	<i>distribusi normal multivariat (p-variat) dengan vektor mean μ dan matriks kovariansi Σ</i>
p :	<i>banyaknya CTQs</i>
$Pn(A)$:	<i>probabilitas terjadinya peristiwa A</i>
R :	<i>matriks korelasi</i>
s :	<i>deviasi standar sampel</i>
S :	<i>matriks kovariansi/variabilitas sampel</i>
$t_{(n-1)}$:	<i>distribusi student's t dengan derajat kebebasan $(n - 1)$</i>
$VAR(\dots)$:	<i>variansi dari ...</i>
α :	<i>PFA</i>
μ :	<i>target proses sederhana/kompleks (vektor mean populasi)</i>
σ :	<i>variabilitas proses sederhana (deviasi standar populasi)</i>
$ A $:	<i>determinan matriks A</i>
A^t :	<i>transpos matriks A</i>
I_p :	<i>matriks identitas (matriks satuan) berukuran p</i>
$\bar{S}$:	<i>rata-rata beberapa matriks kovariansi sampel</i>
S^{-1} :	<i>invers dari matriks S</i>
S_p :	<i>matriks kovariansi sampel yang dipool</i>
$X \sim \dots$:	<i>X berdistribusi</i>
$\bar{X}$:	<i>rata-rata sampel</i>
$\bar{\bar{X}}$:	<i>rata-rata data keseluruhan (grand mean)</i>

$\Gamma(x)$:	<i>nilai fungsi Gamma pada x</i>
Σ :	<i>variabilitas proses (matriks kovariansi populasi)</i>
Σ^{-1} :	<i>invers dari matriks Σ</i>
χ^2_k :	<i>distribusi Chi-Squared</i>

BUKU-BUKU PROFESIONAL TERBARU KARYA PENULIS

I. Buku-Buku Internasional

1. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Надежные диаграммы управления типа Shewhart- для многомерной переменной процесса*. Scientia Scripts, ISBN: 978-620-2-59878-1
2. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Zuverlässige Shewhart-Kontrollkarten für multivariate Prozessvariabilität*. Verlag Unser Wissen, ISBN: 978-620-2-59871-2
3. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Niezawodne wykresy kontrolne typu Shewhart-type Control Charts dla wielowymiarowej zmienności procesu*. Wydawnictwo Nasza Wiedza, ISBN: 978-620-2-59877-4
4. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Betrouwbare Shewhart-type controlediaagrammen voor Multivariate Procesvariabiliteit*. Uitgeverij Onze Kennis, ISBN: 978-620-2-59876-7
5. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Cartes de contrôle fiables de type Shewhart pour la variabilité des processus à plusieurs variables*. Editions Notre Savoir, ISBN: 978-620-2-59872-9
6. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Grafici di controllo affidabili di tipo Shewhart-type per la variabilità di processo multivariate*. Edizioni Sapienza, ISBN: 978-620-2-59875-0
7. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Gráficos de Controle fiáveis do tipo Shewhart-type para Variabilidade Multivariada do Processo*. Edições Nosso Conhecimento, ISBN: 978-620-2-59874-3
8. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Gráficos de control fiables de tipo Shewhart para la variabilidad multivariante de los procesos*. Ediciones Nuestro Conocimiento, ISBN: 978-620-2-59873-6
9. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., and Herwindiati, D.E. (2018). *Reliable Shewhart-type control charts for multivariate process variability*. Lambert Academic Publishing, Printed in Singapore.
10. Djauhari, M.A., and Lee, S.L. (2018). *Forecasting Methods: The needs of policymakers*. Universiti Putra Malaysia Press, Serdang, Malaysia.
11. Dwiyono, K., and Djauhari, M.A. (2018). *Indonesian Konjac (Amorphophallus Muelleri): Its benefit in food security*. Scholar's Press, ISBN: 978-613-8-91736-6.
12. Djauhari, M.A. (2016). *Advanced monitoring techniques for complex process variability in manufacturing industry*. Universiti Putra Malaysia Press, Serdang, Malaysia.

II. Buku-Buku Nasional

1. Djauhari, M.A. (2020). *Ukuran Sampel: Formula generik bagi praktisi sains sosial*. ITB Press, September 2020.
2. Djauhari, M.A. (2021). *Teknik Memuaskan Editor dan Reviewer Jurnal Internasional Berkelas*. ITB Press, September 2021.
3. Djauhari, M.A. (2021). *Teknik Membersihkan Data: Awas...outlier... Outlier.... OUTLIER!* ITB Press, November 2021.

DAFTAR ISI

UCAPAN TERIMA KASIH	vii
SEKAPUR SIRIH	ix
BRIEF DESCRIPTION OF THE BOOK	xiii
DAFTAR SINGKATAN	xv
SIMBOL MATEMATIK	xvii
BUKU-BUKU PROFESIONAL TERBARU KARYA PENULIS	xix
DAFTAR ISI	xxi
BAGIAN I PENGONTROLAN PROSES KOMPLEKS	1
BAB 1 PENDAHULUAN	3
1. Empat Skenario Pengontrolan	3
2. Pengontrolan MPT	5
3. Pengontrolan MPV	5
4. Masalah Keandalan	6
5. Organisasi Buku	7
6. Rangkuman	8
7. Catatan Penutup	8
BAB 2 TARGET PROSES DAN VARIABILITAS PROSES	11
1. Target Proses Sederhana	12
2. Variabilitas Proses Sederhana	12
3. Target Proses Kompleks	13
4. Variabilitas Proses Kompleks	14
BAB 3 STRATEGI PENGONTROLAN PROSES KOMPLEKS	17
1. Sampel Acak pada MVSPC	17
2. Makna Geometris Matriks Data	19
3. Strategi Pengontrolan	21
BAGIAN II PENGONTROLAN TARGET PROSES	23
BAB 4 TEKNIK BERBASIS OBSERVASI INDIVIDUAL: STATISTIK $\bar{\bar{x}}$	25
1. Langkah Persiapan	26
2. Bila μ dan Σ Diketahui	27
3. Bila μ dan Σ Tidak Diketahui	31

BAB 5	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	43
1.	Bila μ dan Σ Diketahui	43
2.	Bila μ dan Σ Tidak Diketahui	48
BAB 6	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	59
1.	Bila μ dan Σ Diketahui	59
2.	Bila μ dan Σ Tidak Diketahui	65
BAGIAN III	PENGONTROLAN VARIABILITAS PROSES	77
BAB 7	TEKNIK BERBASIS OBSERVASI INDIVIDUAL: STATISTIK $\bar{X}$	79
BAB 8	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	87
1.	Diagram kontrol $\bar{X}$ Versi Klasik	87
2.	Diagram $\bar{X}$ Versi Baru	97
BAB 9	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	105
BAB 10	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	115
BAB 11	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN; STATISTIK $\bar{X}$	125
BAB 12	TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP DENGAN CTQ BERBEDA: STATISTIK $\bar{X}$ DAN $\bar{X}$	135
1.	Pengontrolan dengan statistik $\bar{X}$	137
2.	Pengontrolan dengan statistik $\bar{X}$	144
BAGIAN IV	PROSES KOMPUTASI	151
BAB 13	BATAS KONTROL DALAM MS EXCEL	153
1.	Kuantil distribusi Beta	153
2.	Kuantil distribusi Chi-Squared	154
3.	Kuantil distribusi F	155
4.	Kuantil distribusi Normal	156
BAB 14	OPERASI MATRIKS DENGAN MS EXCEL	159
1.	Transpose Matriks	159
2.	Inversi Matriks	160
3.	Perkalian 2 Matriks	161
4.	Determinan Matriks	162
5.	Jumlah Kuadrat Semua Elemen Matriks	163

BAGIAN V RANGKUMAN	165
BAB 15 INTISARI.....	167
1. Dalam Sorotan	167
2. Ringkasan	167
BAB 16 KUMPULAN DATA	169
BAB 17 EMPAT TABEL STATISTIK.....	207
1. Tabel Statistik Distribusi Beta	207
2. Tabel Statistik Distribusi Chi-Squared.....	210
3. Tabel Statistik Distribusi F	213
4. Tabel Statistik Distribusi Normal Standar.....	226
DAFTAR KARYA ILMIAH RUJUKAN	229
INDEKS SUBYEK	235
BEBERAPA TESTIMONI.....	239
TENTANG PARA PENULIS	249

BAGIAN I

PENGONTROLAN PROSES KOMPLEKS

- Empat skenario pengontrolan proses kompleks yakni (1) berbasis observasi individual, (2) berbasis sub-grup berukuran konstan, (3) berbasis sub-grup berukuran tak konstan, dan (4) berbasis sub-grup dengan CTQ berbeda
- Dua jenis pengontrolan yakni (1) pengontrolan MPT (target proses kompleks), dan (2) pengontrolan MPV (variabilitas proses kompleks)
- Strategi pengontrolan terdiri atas dua tahap yakni (1) Tahap I (penaksiran parameter proses), dan (2) Tahap II (pengontrolan parameter proses)

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada tahun 2018, buku kami berjudul “*Reliable Shewhart-type Control Charts for Multivariate Process Variability*” terbit di Jerman. Buku tersebut telah mendapat sambutan yang sangat baik sehingga pada tahun 2020 ia diterbitkan ulang di delapan negara Eropa dalam bahasa setempat, yakni, Belanda, Itali, Jerman, Perancis, Polandia, Portugis, Rusia, dan Spanyol. Sebagian besar isinya, yang direkam dalam Bab 7–Bab 12 buku ini, sekarang dapat dinikmati oleh para profesional dalam bidang Q-STEM (Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering & Quality Management) di Tanah Air, termasuk Dosen, Peneliti dan Mahasiswa yang menggeluti bidang SPC (*Statistical Process Control*).

Dalam pengontrolan kualitas proses secara statistik (*Statistical Process Control* disingkat SPC), diagram kontrol merupakan sumber informasi utama tentang kinerja proses dari waktu ke waktu. Informasi inilah yang menjadi petunjuk bagi pengambil keputusan tentang kualitas proses terutama dalam upaya meningkatkan kualitas secara kontinu (*Continuous Quality Improvement*). Oleh karena itu, diagram kontrol harus dapat diandalkan (*reliable*).

Dalam praktik, keandalan proses ditentukan oleh (1) kesesuaian statistik yang digunakan dalam membangun diagram kontrol, dan (2) batas kontrol yang mencerminkan probabilitas munculnya alarm palsu (*Probability of False Alarm* disingkat PFA). Secara hermeneutikal, kata “andal” adalah kata sifat yang bermakna “kualitas atau kinerja yang secara konsisten baik.” Berdasarkan pengertian ini, diagram kontrol yang akan dibahas dalam buku ini adalah diagram kontrol yang andal; artinya yang “dapat dipercaya” dan didukung oleh referensi yang baik.

1. Empat Skenario Pengontrolan

Buku ini adalah tentang teknik pengontrolan proses yang kompleks secara statistik (*Multivariate Statistical Process Control* disingkat MVSPC). MVSPC adalah cabang dari SPC yang secara khusus membahas pengontrolan secara simultan beberapa variabel (disebut *Critical to Quality* dan disingkat CTQ) yang saling berkorelasi. Arti simultan di sini adalah sekaligus; tidak boleh mengontrol setiap CTQ satu-per-satu.

Mengapa harus simultan? Karena kehadiran korelasi antar CTQ mengakibatkan penampakan setiap CTQ menjadi semu. Sebagai akibat lanjutan, struktur inter-korelasi antar CTQ membuat proses menjadi kompleks. Semakin banyak CTQ yang dilibatkan dalam menentukan kualitas proses, semakin kompleks proses yang harus ditangani.

Pengontrolan dalam buku ini dimulai dengan pengontrolan parameter target proses kompleks (*Multivariate Process Target* disingkat MPT). Dalam bahasa statistika, artinya pengontrolan parameter vektor *mean* populasi. Lalu, dilanjutkan dengan pengontrolan parameter variabilitas proses kompleks (*Multivariate Process Variability* disingkat MPV). Artinya, pengontrolan parameter dispersi populasi. Para profesional dalam bidang sains kualitas, teknologi kualitas, rekayasa kualitas dan manajemen kualitas (*Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering & Quality Management* disingkat Q-STEM) mengetahui bahwa mengontrol MPV sama pentingnya dengan mengontrol MPT (Montgomery 2001, 2005, 2009, 2019).

Selanjutnya perlu dicatat bahwa, dalam praktik, cara mengontrol kedua parameter MPT dan MPV tersebut di atas harus disesuaikan dengan skenario sampling. Dalam literatur tentang SPC, hanya ada dua skenario sampling yang biasa digunakan yakni,

1. Skenario sampling pertama yang dikenal sebagai skenario berbasis observasi individual; artinya pengontrolan didasarkan kepada sampel berukuran $n = 1$.
2. Skenario sampling kedua yang dikenal sebagai skenario berbasis sub-grup berukuran $n > 1$ di mana nilai n konstan untuk setiap sub-grup.

Nah, di dalam buku ini, selain dua skenario sampling tersebut, diperkenalkan dua lagi skenario sampling yang baru. Skenario sampling ketiga adalah “berbasis sub-grup berukuran tak konstan.” Sebut saja ukuran sub-grup (*sample size*) pada saat pengontrolan ke-1 adalah n_1 , pengontrolan ke-2 adalah n_2 , ..., ke- m adalah n_m . Secara umum, ukuran sub-grup pada saat pengontrolan ke- i adalah n_i . Sedangkan skenario sampling keempat berbasis sub-grup dengan CTQ yang berbeda.

Dua skenario sampling pertama biasa digunakan dalam pengontrolan kualitas proses industri manufaktur khususnya dan bidang sains natural umumnya. Sedangkan skenario sampling ketiga adalah skenario baru dan diperkenalkan dalam buku ini dengan maksud agar para pembaca dapat mengontrol kualitas proses di industri jasa seperti jasa layanan di agensi-agensi BIG (*Business, Industry & Government*) termasuk layanan pendidikan dan khususnya proses belajar mengajar. Di industri jasa, umumnya ukuran sampel tidak dapat dikontrol. Artinya, sulit menjamin bahwa ukuran sub-grup akan tetap konstan. Sebagai contoh, banyaknya murid dalam satu kelas belum tentu sama dengan banyak murid di kelas yang lain. Begitu juga, banyaknya nasabah yang datang ke sebuah bank di suatu hari sangat mungkin berbeda dengan banyaknya nasabah yang datang di hari yang lain.

Bagaimana halnya dengan skenario sampling keempat? Apabila dalam buku ini tiga skenario sampling pertama digunakan untuk mengontrol MPT dan MPV, tidak demikian halnya dengan skenario sampling keempat. Yang keempat hanya bisa digunakan untuk mengontrol MPV saja.

Ketika kualitas suatu proses secara statistik berada pada keadaan terkontrol atau terkendali (*in-control* disingkat IC), maka adanya fluktuasi pada kinerja proses adalah sesuatu yang alami sebagai akibat dari sifat kerandaman proses (*random effect* dan dikenal dengan istilah *common cause*). Akan tetapi, tatkala proses berada dalam keadaan tak terkontrol (*out-*

of-control disingkat OOC), maka diagram kontrol akan memberikan tanda atau sinyal atau alarm terjadinya gangguan. Keadaan ini ditunjukkan dengan adanya fluktuasi proses yang melampaui batas yang ditentukan sebagai akibat *non-random effect* dan dikenal dengan istilah *assignable cause*.

Alarm tersebut di atas mungkin berupa alarm palsu (*false alarm*) atau berupa alarm tulen (*true alarm*). Untuk memastikannya, setiap alarm harus diinvestigasi lebih lanjut. Apabila ternyata berupa alarm palsu, proses tetap berjalan seperti biasa. Namun, dalam hal sebaliknya di mana alarm berupa alarm tulen, maka harus dicari akar penyebabnya dan kalau perlu harus diikuti dengan tindakan perbaikan sebelum proses dijalankan kembali.

2. Pengontrolan MPT

Teknik pengontrolan MPT sudah sangat berkembang, jauh mendahului perkembangan teknik pengontrolan MPV. Pada pengontrolan MPT, untuk ketiga skenario sampling, digunakan diagram kontrol berdasarkan statistik T^2 Hotelling. Statistik ini, yang diperkenalkan pertama kali oleh Hotelling (1947), sangat perkasa (*powerful*) dalam mendeteksi OOC seperti dijelaskan dalam Mason dkk. (2009).

Sebagai catatan, penggunaan statistik T^2 pada dua skenario sampling pertama di industri manufaktur bukan sesuatu yang baru. Di lain pihak, penggunaannya pada skenario sampling ketiga belum pernah terjadi sebelumnya. Ini adalah salah satu kontribusi dari buku ini.

3. Pengontrolan MPV

Masalah yang lebih menantang adalah pada pengontrolan MPV. Dalam beberapa tahun terakhir, teknik pengontrolan MPV telah berkembang dengan pesat. Namun demikian, menurut Ries dan Rato (2013), diagram kontrol berbasis *GV* (*generalized variance*) adalah yang paling banyak diadopsi. Dan, sebagai contoh perkembangan mutakhir dapat dilihat di Carlos Garcia-Diaz (2007) yang memperkenalkan diagram kontrol berdasarkan variansi efektif (*EV*). Fitur khusus dari diagram kontrol *EV* ini adalah dapat digunakan untuk membandingkan variabilitas berbagai proses sejenis dengan CTQ yang berbeda; baik berbeda dari segi jumlah maupun segi jenis.

Popularitas diagram kontrol *GV* terletak antara lain pada kemudahan dalam memahami perilaku distribusi asimtotisnya (dapat didekati oleh distribusi normal) dan dalam memberikan interpretasi geometris (*GV* sebagai ukuran MPV). Kesahihannya telah menjadi topik diskusi yang hangat selama beberapa dekade terakhir. Silahkan lihat, misalnya, Anderson (1966, 1984) untuk pengembangan awal interpretasi geometris, Mason dkk. (2009) untuk interpretasi geometris dalam MVSPC, dan Djauhari (2005) untuk perilaku distribusi. Inilah antara lain alasan mengapa diagram kontrol *GV* menjadi yang paling populer dan paling banyak digunakan dalam praktik. Namun, seperti yang telah dikemukakan di depan, dan juga dalam berbagai literatur, *GV* memiliki keterbatasan yang serius sebagai ukuran MPV.

Alt dan Smith (1988), demikian juga Montgomery (2001, 2005), telah memperingatkan keterbatasan *GV* tersebut. Hal ini memotivasi Djauhari (2007) untuk mempertanyakan

kelayakan GV sebagai ukuran MPV. Kemudian, Djauhari memperkenalkan apa yang disebut variansi vektor (*vector variance* disingkat VV) sebagai ukuran yang lain. Dia pun menunjukkan bahwa VV dan GV saling komplementer atau saling melengkapi satu sama lain. Oleh karena itu, kedua diagram kontrol GV dan diagram kontrol VV harus digunakan bersama-sama. Keunggulan penggunaan kedua diagram kontrol itu dalam pengontrolan MPV, ditunjukkan dalam Djauhari dkk (2008) dan Djauhari dan Mohamad (2010). Keunggulan VV yang lain dibandingkan dengan GV khusus pada bidang MVSPC dapat dilihat di Ryan (2011). Sedangkan pada bidang statistik tangguh (*robust statistics*) dapat dilihat di Herwindiati dkk (2007) dan Wilcox (2012).

4. Masalah Keandalan

Masalah yang krusial dalam pengontrolan proses muncul ketika kita berurusan dengan ukuran sampel yang kecil. Studi yang dilakukan Djauhari dkk (2016), yang melibatkan sampel berukuran kecil menunjukkan bahwa batas kontrol dari diagram kontrol GV dan diagram kontrol VV tidak mencerminkan PFA yang telah ditentukan. Ini berarti bahwa tatkala sinyal OOC muncul, secara probabilistik kemunculannya tidak dapat diandalkan dengan presisi yang tinggi. Tingkat keandalannya bahkan tidak diketahui.

Untuk mengatasi masalah ketidakandalan tersebut, Djauhari dkk. (2018) memperkenalkan konsep konstanta keandalan (*reliability constant*) dalam buku berjudul "*Reliable Shewhart-type Control Charts for Multivariate Process Variability*" terbitan Lambert Academic Publishing, dicetak oleh Markono Print, Pte, Singapore. Para pembaca yang tertarik mendalami konsep konstanta keandalan dianjurkan untuk berkonsultasi dengan buku tersebut. Konsep ini adalah sesuatu yang baru dan menjadi kontribusi utama buku itu. Konsep ini akan membawa kita pada konstruksi diagram kontrol GV yang andal dan diagram kontrol VV yang andal. Dalam buku tersebut di atas, nilai konstanta keandalan ditentukan dengan menggunakan eksperimen simulasi. Selanjutnya, untuk memudahkan para praktisi, buku itu juga menyediakan tabel konstanta keandalan. Berbagai contoh disajikan pula dalam buku itu baik contoh dari industri manufaktur maupun dari industri jasa.

Sejak pertama kali terbit, buku itu telah mendapat banyak apresiasi dari para praktisi SPC sehingga pada tahun 2020 diterbitkan ulang di 8 negara Eropa dengan menggunakan bahasa setempat. Kedelapan negara Eropa tersebut adalah; Belanda, Italia, Jerman, Perancis, Polandia, Portugis, Rusia dan Spanyol.

Apabila pengontrolan MPT dapat dilakukan berdasarkan kepada salah satu dari ketiga skenario sampling pertama, pengontrolan MPV dapat didasarkan kepada salah satu dari empat skenario sampling yang sudah disebutkan di atas. Untuk skenario sampling yang pertama, pengontrolan MPV kita laksanakan dengan menggunakan diagram kontrol W (Wilks) yang telah sejak lama diperkenalkan (Anderson, 1966 dan 1984). Selanjutnya, untuk skenario sampling kedua, selain diagram kontrol GV yang sangat populer penggunaannya, digunakan pula diagram kontrol VV sebagai komplemennya. Bagaimana dengan skenario sampling ketiga? Sama seperti pada skenario kedua, yaitu dengan menggunakan diagram kontrol GV

dan juga IV . Akan tetapi, sebagai akibat ukuran sub-grup yang tak konstan, batas-batas kontrol (*control limits*) akan berupa kurva dan tidak berupa garis lurus. Adapun untuk skenario sampling keempat kita gunakan diagram kontrol EV dan diagram kontrol EVV . Dua skenario sampling ini pun belum pernah ada sebelumnya dan merupakan kontribusi buku ini.

5. Organisasi Buku

Menu yang disajikan dalam buku ini terbagi atas lima bagian. Bagian I (Kualitas Proses Kompleks) berisi tiga bab termasuk bab pertama (Pendahuluan) ini. Dan, dua bab berikutnya dimulai dengan Bab 2 (Target Proses dan Variabilitas Proses) yang mengetengahkan berbagai statistik untuk mengukur target proses. Di sini ditunjukkan bahwa variabilitas proses sangat sukar diukur dan difahami. Lalu, Bab 3 (Strategi Pengontrolan Proses Kompleks) membahas tentang (1) sampel acak pada MVSPC, (2) makna geometris matriks data, dan (3) strategi pengontrolan yang terdiri atas Tahap I (estimasi nilai parameter proses) dan Tahap II (pengontrolan proses).

Selanjutnya, Bagian II (Pengontrolan Target Proses) terdiri atas tiga bab. Bab 4 (Teknik Berbasis Observasi Individual) menjelaskan bagaimana caranya melakukan estimasi parameter proses pada Tahap I dan melakukan pengontrolan pada Tahap II apabila ukuran sampel $n = 1$. Bab berikutnya, Bab 5 (Teknik Berbasis Sub-grup Berukuran Konstan) membahas bagaimana Tahap I dan Tahap II dilaksanakan apabila $n > 1$ namun nilainya konstan untuk setiap sub-grup. Dan, Bab 6 (Teknik Berbasis Sub-grup Berukuran Tak Konstan) membahas bagaimana caranya kedua tahap dilaksanakan apabila $n > 1$ namun sub-grup yang satu bisa berbeda ukurannya dengan sub-grup yang lain. Pada Bagian II ini hanya digunakan satu buah statistik yakni statistik T^2 Hotelling.

Bagian III (Pengontrolan Variabilitas Proses) berisi enam bab, dari Bab 7 sampai dengan Bab 12. Banyaknya bab menunjukkan tingkat kompleksitas MPV yang lebih tinggi ketimbang MPT. Bab 7 (Teknik Berbasis Observasi Individual) membahas tentang bagaimana cara melaksanakan kedua tahap pengontrolan MPV apabila $n = 1$ dengan menggunakan diagram kontrol W . Bab 8 (Teknik Berbasis Sub-grup Berukuran Konstan) membahas cara mengontrol dengan menggunakan diagram kontrol GV di mana nilai n sama untuk setiap sub-grup dengan $n > 1$. Bab 9 juga membahas hal yang sama seperti pada Bab 8 namun dengan menggunakan diagram kontrol IV . Selanjutnya, Bab 10 sama seperti Bab 8 tapi dengan ukuran sub-grup yang tidak konstan. Kemudian, Bab 11 sama seperti Bab 9 tapi dengan menggunakan diagram kontrol IV . Dan, akhirnya, Bab 12 membahas cara membedakan dan mengontrol MPV berbasis sub-grup apabila CTQ di sub-grup yang satu bisa berbeda dengan CTQ di sub-grup yang lain. Perbedaan ini bisa dari segi jumlah CTQ maupun jenisnya. Untuk itu, dalam buku ini digunakan diagram kontrol EV seperti yang dikemukakan Carlos Garcia-Diaz (2007) dan juga diagram kontrol EVV . Sebagai ukuran MPV, statistik EVV diperkenalkan oleh Djauhari dan Asrah (2019), dan meraih anugerah Gold Medal Award, pada International Research and Innovation Symposium and Exposition, 2021 di Malaysia.

Nah, Bagian IV (Proses Komputasi) terdiri atas dua bab yakni Bab 13 dan Bab 14. Bab 13 (Batas Kontrol Dalam MS Excel) memperkenalkan bagaimana cara membuat tabel statistik

sendiri untuk berbagai keperluan, termasuk keperluan riset. Untuk itu, cukup digunakan MS Excel dan tidak perlu menggunakan perangkat lunak statistik yang besar dan mahal. Sedangkan, Bab 14 (Operasi Matriks Dengan MS Excel) menyajikan cara melakukan operasi matriks yang diperlukan dalam pengontrolan proses kompleks. Umpamanya, (1) penjumlahan dua matriks, (2) perkalian antar matriks, termasuk perkalian matriks dan vektor, (3) pencarian inversi matriks, (4) pencarian determinan sebuah matriks, dan (5) operasi transpose dari suatu matriks atau vektor.

Sebagai bagian terakhir dari buku ini adalah Bagian V (Rangkuman) yang juga terdiri atas tiga bab yakni yakni Bab 15 (Intisari), Bab 16 (Kumpulan Data), dan Bab 17 (Empat Tabel Statistik). Bab 15 menyajikan rangkuman penting dari isi buku ini. Lalu, Bab 16 berisi berbagai macam kumpulan data yang digunakan dalam buku ini sebagai bahan ilustrasi tatkala menyajikan contoh-contoh aplikasi teknik pengontrolan proses kompleks. Dan, sebagai bab penutup, Bab 17 menyajikan empat tabel statistik yang digunakan dalam pengontrolan kualitas proses kompleks.

6. Rangkuman

Seluruh uraian di atas dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Pada MVSPC, yang dikontrol adalah MPT dan MPV. Pengontrolan harus dilakukan secara simultan terhadap beberapa variabel (CTQ) yang saling berkorelasi. Tidak boleh mengontrol setiap variabel satu-per-satu.
2. Teknik pengontrolan tergantung kepada skenario sampling yang dipilih. Apakah (1) berbasis observasi individual, atau (2) berbasis sub-grup berukuran konstan, ataukah (3) berbasis sub-grup berukuran tak konstan, ataukah (4) berbasis sub-grup dengan CTQ yang berbeda. Skenario sampling ketiga dan keempat merupakan kontribusi dari buku ini dalam MVSPC.
3. Pengontrolan MPT didasarkan kepada statistik T^2 Hotelling. Penggunaannya pada skenario sampling ketiga merupakan kontribusi lainnya dari buku ini.
4. Pengontrolan MPV berdasarkan skenario sampling ketiga dengan menggunakan diagram kontrol GV dan diagram kontrol VV juga merupakan kontribusi dari buku ini.
5. Kontribusi berikutnya adalah pada pengontrolan MPV dengan menggunakan diagram kontrol EVV . Diagram kontrol ini berguna tatkala CTQ pada sub-grup yang satu berbeda dengan CTQ pada sub-grup yang lain. Penggunaan diagram kontrol ini dan diagram kontrol EV secara bersama-sama sangat dianjurkan karena yang satu dapat menutupi kekurangan yang lain.

7. Catatan Penutup

Dalam buku ini, ada 41 buah contoh yang disajikan; 9 buah di Bagian II, 19 buah di Bagian III, dan 13 buah lagi di Bagian IV. Beberapa contoh menggunakan data dari industri manufaktur dan beberapa contoh lainnya menggunakan data dari industri jasa termasuk data kualitas proses belajar mengajar di Sekolah Menengah dan di Perguruan Tinggi. Ada juga contoh yang menggunakan data dari bursa efek dan juga data hasil simulasi.

Proses komputasi pada contoh-contoh itu dilaksanakan dengan menggunakan sumber terbuka (*open-source*) yang paling sederhana dan paling populer yakni Microsoft Excel (MS Excel). Penggunaan MS Excel dimaksudkan untuk menunjukkan bahwa algoritma komputasinya sangat mudah. Selain itu, penggunaan MS Excel memungkinkan buku ini dapat dimanfaatkan oleh kalangan yang sangat luas baik dalam pengertian ragam profesi maupun ragam geografis. Secara geografis, buku ini dirancang agar kawan-kawan dari seluruh pelosok Tanah Air, dari profesi apapun, bisa menikmatinya.

Apabila pembaca mengalami kesukaran dalam mencerna algoritma yang disajikan dalam buku ini, penyebabnya hanyalah karena belum terbiasa menggunakan simbol-simbol matematika dan statistika. Padahal, yang namanya simbol atau rumus matematika/statistika tidak lain adalah ungkapan fikiran yang dituangkan dalam kalimat-kalimat baku bahasa matematika/statistika. Nah, seperti bahasa-bahasa yang lain (baik bahasa manusia maupun bahasa mesin), kalau penggunaannya tidak dibiasakan dapat dipastikan si pengguna akan gagu mengucapkannya. Untuk menghindarinya, kuncinya hanya satu, yaitu membiasakan menggunakan kalimat-kalimat dalam bahasa matematika/statistika.

Apakah kalimat-kalimat matematika/statistika dalam buku ini sah? Justifikasi atau bukti kesahihan atas semua rumus atau dalil yang ada dalam buku ini akan ditunjukkan dengan cara sebagai berikut. Referensi akan diberikan baik untuk rumus atau dalil yang dicuplik dari literatur maupun untuk rumus dan dalil yang penulis buat sendiri.

Akhir kata, semoga buku ini bisa memberikan inspirasi dan motivasi bagi para pembaca/pengguna statistik dari berbagai profesi di Tanah Air termasuk para Pamong Desa dan juga para Mahasiswa. Selamat berkarya!

BAB 2

TARGET PROSES DAN VARIABILITAS PROSES

Proses ada di mana-mana, di mana saja, dan kapan saja. Proses apa saja. Bukan hanya proses produksi di pabrik dan industri manufaktur lainnya, akan tetapi juga proses produksi pertanian, peternakan, perikanan, proses layanan di industri jasa, proses layanan Rumah Sakit, proses layanan di kantor-kantor pemerintah, proses belajar mengajar di sekolah dan perguruan tinggi., dsb. Hidup manusia adalah proses.

Secara statistik, perilaku kinerja sebuah proses dinyatakan oleh apa yang disebut distribusi probabilitistik. Sedangkan, yang menjadi sasaran pengontrolan kualitas proses adalah (1) target proses, dan (2) variabilitas proses. Dalam praktik, kedua sasaran ini masing-masing dinyatakan oleh apa yang disebut parameter lokasi dan parameter dispersi dari distribusi tersebut. Parameter pertama menunjuk kepada lokasi (*location*) di mana distribusi mencapai keseimbangan (*equilibrium*) dan umumnya menunjuk kepada lokasi di mana distribusi terkonsentrasi. Sementara itu, parameter kedua menunjuk kepada pola penyebaran (*dispersion*) semua nilai yang mungkin dimiliki oleh satu atau sekelompok CTQ yang saling berkorelasi. Pola penyebaran yang terkonsentrasi dengan rapat (*dense*) menunjukkan kualitas proses yang baik. Dan, semakin tinggi tingkat konsentrasinya, semakin baik kualitas proses. Dalam bahasa statistik, hubungan antara kualitas dan variabilitas diungkapkan dengan rumus yang sangat sederhana sebagai berikut.

$$\text{Kualitas} = 1/\text{Variabilitas}$$

Kualitas berbanding terbalik dengan variabilitas!

Para profesional dalam bidang Q-STEM, termasuk para manajer kualitas (*Quality Managers*), faham betul bahwa penanganan variabilitas proses menuntut perhatian yang lebih ketimbang target proses. Inilah yang menjadi alasan mengapa sebagian besar ruang dalam buku ini dialokasikan untuk membahas berbagai ukuran variabilitas proses kompleks (MPV) yang paling penting. Target proses kompleks (MPT) hanya dibahas seperlunya saja. Dan, oleh karena itu, demi kesinambungan perkembangan konsep pengontrolan target dan variabilitas proses secara statistik, paparan pada bab ini akan dimulai dengan pengontrolan proses sederhana (*univariate statistical process control* disingkat UVSPC). Adapun yang dimaksud dengan proses sederhana adalah proses di mana kualitasnya hanya ditentukan oleh satu buah

CTQ saja. Sedangkan jika terdapat lebih dari satu buah CTQ, di mana inter-korelasinya harus diperhitungkan, proses tersebut disebut proses kompleks. Selanjutnya, dalam literatur tentang SPC, pengontrolan proses kompleks lebih dikenal dengan istilah MVSPC (*multivariate statistical process control*).

1. Target Proses Sederhana

Pada proses sederhana, berbagai statistik biasa digunakan untuk menunjukkan target proses atau lokasi. Sepuluh diantaranya adalah,

1. *Mean*, tepatnya *arithmetic mean*, adalah jumlah semua nilai data dibagi banyaknya data (n). Perlu dicatat bahwa secara fundamental, pengertian mean adalah besaran yang paling dekat dengan semua data dalam arti meminimumkan jumlah kuadrat jarak Euclides.
2. *Median*, yakni besaran yang membagi himpunan data menjadi dua bagian sama banyak. Berbeda dengan *mean*, median adalah besaran yang paling dekat dengan semua data dalam arti meminimumkan jumlah jarak geodesik (*geodesic distance*).
3. *Mode*, adalah nilai data dengan frekuensi paling banyak.
4. *Geometric mean*, atau akar pangkat n dari hasil perkalian semua nilai data.
5. *Harmonic mean*, yakni kebalikan dari *arithmetic mean* semua kebalikan nilai data. Yang satu ini hanya boleh digunakan jika semua data bernilai positif.
6. *Truncated mean* atau *trimmed mean* yakni *arithmetic mean* dari himpunan semua data setelah beberapa data terbesar dan beberapa data terkecil dibuang.
7. *Interquartile mean* (IQM), atau rata-rata data yang berada di antara kuartil pertama (Q_1) dan kuartil ketiga (Q_3). Ini adalah contoh truncated mean.
8. *Midrange*, tengah-tengah antara nilai data terbesar (MAX) dan nilai data terkecil (MIN) atau $(MAX - MIN)/2$
9. *Midhinge*, atau $(Q_3 - Q_1)/2$
10. *Winsorized mean*, yakni arithmetic mean di mana data ekstrim diganti dengan data terdekat ke median.

Banyak sekali statistik yang telah diciptakan para statistisi untuk menjelaskan target proses. Ini menandakan bagaimana sulitnya memahami target proses dengan menggunakan satu buah ukuran/besaran skalar. Namun, dari sekian banyaknya parameter, hanya *mean* yang paling populer dan luas penggunaannya dalam SPC. Mengapa demikian? Karena *mean* memiliki sifat-sifat matematikal yang diperlukan para pengguna statistika selain proses komputasinya mudah.

2. Variabilitas Proses Sederhana

Variabilitas proses jauh lebih sukar difahami ketimbang target proses. Berikut 10 buah parameter yang biasa digunakan untuk menggambarkan variabilitas proses sederhana,

1. *Deviasi Standar* (SD),
2. *Variansi*
3. *Range*

4. *Interquartile range* (IQR)
5. *Mean absolute difference*
6. *Median absolute deviation* (MAD)
7. *Average absolute deviation*
8. *Distance standard deviation*
9. Koefisien Variasi (CV)
10. *Quartile coefficient of dispersion*

Di antara sekian banyak parameter yang dijadikan ukuran variabilitas, hanya tiga pertama yang biasa digunakan pada SPC yakni deviasi standar, variansi dan range. Ada juga ukuran lain yang kerap luput dari perhatian para pengguna statistik seperti ukuran Luceno dan ukuran berbasis kuantil. Ukuran Luceno (L) adalah,

$$L = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}| \text{ di mana } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

dengan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak berukuran n . Sedangkan ukuran berbasis kuantil adalah,

$$Q = \frac{x_{0.99965} - x_{0.00035}}{6}$$

di mana x_α adalah kuantil sampel ke- $(1 - \alpha)$. Kedua ukuran ini masing-masing diturunkan dari indeks kapabilitas proses C_{pk} dan $C_{pk}(q)$. Bagi para pembaca yang tertarik dengan diskusi lebih lanjut tentang kedua ukuran ini dianjurkan untuk berkonsultasi dengan Montgomery (2001, p. 364–365).

3. Target Proses Kompleks

Sifat kompleksitas dari sebuah proses kompleks mengakibatkan semakin sulitnya mendefinisikan target proses. Dari sekian banyak ukuran target proses sederhana, hanya *mean* yang paling fleksibel menyesuaikan dengan lingkungan yang kompleks. *Mean* (dalam UVSPC) bermetamorfosis menjadi vektor *mean* (dalam MVSPC). Apabila dalil limit pusat (*central limit theorem* disingkat CLT) dalam UVSPC menjamin bahwa distribusi *mean* sampel mendekati distribusi normal, maka pada MVSPC dalil tersebut menjamin bahwa vektor *mean* sampel mendekati distribusi normal multivariat.

Ukuran target proses yang populer berikutnya adalah median (dalam UVSPC) yang berubah menjadi vektor median (dalam MVSPC). Hanya dua ukuran itu saja yang populer! Namun, perilaku distribusional dari vektor median sampel pada proses kompleks sukar diinvestigasi. Tidak demikian halnya dengan vektor *mean* sampel. Oleh karena itu, maka hanya vektor *mean* sampel yang paling populer digunakan dalam MVSPC. Kalau pun untuk beberapa kasus dalam MVSPC distribusi eksak dari vektor *mean* sampel tidak mudah diidentifikasi, distribusi pendekatannya akan mudah diperoleh dengan memperbesar ukuran sampel n . Caranya, cukup dengan menggunakan CLT. Oleh karena itulah, dalam buku ini, MPT dinyatakan oleh vektor *mean* sampel.

4. Variabilitas Proses Kompleks

Dalam proses kompleks, variabilitas proses (MPV) lebih sulit lagi diukur. Akibatnya, MPV sulit diatur, sulit dikontrol dan sulit dikelola. Dari sekian banyak ukuran variabilitas proses sederhana, hanya variansi yang mampu berkembang di lingkungan proses kompleks. Di lingkungan proses sederhana, variansi bernilai skalar. Perkembangannya di lingkungan proses kompleks, ia berupa matriks simetris berukuran p buah baris dan p buah kolom dengan p adalah banyaknya CTQ. Matriks ini dikenal dengan nama matriks kovariansi (*covariance matrix*).

Matriks kovariansi biasa diberi lambang Σ (untuk populasi) dan S (untuk sampel). Elemen diagonal ke-1 dari S diberi lambang s_{11} , elemen diagonal ke-2 s_{22} , sampai dengan elemen diagonal ke- p , s_{pp} . Lambang s_{11} , s_{22} , sampai dengan s_{pp} menyatakan variansi CTQ (atau variabel) ke-1, ke-2, sampai dengan CTQ yang ke- p . Sedangkan elemen di luar diagonal menyatakan kovariansi. Elemen pada baris ke- k dan kolom ke- m , s_{km} , adalah kovariansi antara variabel ke- k dan variabel ke- m . Dan, karena matriks S simetris, $s_{mk} = s_{km}$.

Mengapa MPV sulit diukur? Sebab, tidak ada ukuran skalar tunggal yang dapat digunakan untuk mewakili kompleksitas struktur kovariansi yang terkandung di dalam S . Bahkan, semakin besar nilai p (semakin banyak variabel yang terlibat sebagai CTQ), semakin tinggi kompleksitas proses. Namun, dua ukuran berikut adalah yang paling penting yang biasanya digunakan dalam pengontrolan proses kompleks (MVSPC). Pertama, variansi umum (*generalized variance* disingkat GV) dan kedua variansi vektor (*vector variance* disingkat VV).

Ukuran-ukuran yang lain juga tersedia dalam berbagai literatur tetapi tidak berkembang di dalam MVSPC; tidak seperti GV dan VV . Umpamanya, (1) variansi total (*total variance* disingkat TV), (2) akar kuadrat dari variansi umum (SRGV), (3) variansi umum relatif (RGV), dan (4) ellipsoid bervolume minimum (MVE). Beberapa ahli seperti Alt dan Smith (1988) dan Montgomery (2001, 2005) telah membahas penerapan SRGV dalam MVSPC. Versi SRGV dengan batas kontrol yang tak bias (*unbiased*) juga telah diperkenalkan oleh Djauhari (2005). Namun di dalam praktik, penggunaan SRGV didominasi oleh GV . Sementara itu, penerapan RGV dapat ditemukan di Tang dan Barnett (1996). Adapun mengenai MVE, peran utamanya biasa ditemukan dalam literatur statistik tangguh (*robust statistics*). Penjelasan yang komprehensif tentang hal ini dapat dilihat, misalnya, dalam Rousseeuw (1985), dan Grambow dan Stromberg (1998).

Contoh lain adalah variansi efektif (*effective variance* disingkat EV). Ukuran MPV ini adalah rata-rata geometrik (*geometric mean*) dari semua nilai eigen dari matriks kovariansi populasi Σ dan didefinisikan sebagai $\sqrt[p]{|\Sigma|}$. Definisi formalnya dapat dilihat di Serfling (1980) atau Pena dan Rodriguez (2005). Sedangkan untuk penggunaannya dalam MVSPC dapat dilihat di Carlos Garcia-Diaz (2007). Ukuran EV biasa digunakan untuk membandingkan variabilitas beberapa proses sejenis, tatkala proses-proses tersebut melibatkan CTQ yang berbeda; baik berbeda dari segi jumlah maupun dari segi jenis. Sebagai catatan, EV adalah varian dari GV . Oleh karena itu, ia mewarisi sifat-sifat yang dimiliki GV .

Seperti halnya GP , EV memiliki keterbatasan yang serius. Terutama pada kemampuannya membedakan dua matriks kovariansi; dua matriks kovariansi yang berbeda bisa memiliki GP yang sama. Untuk menutupi keterbatasan tersebut, dalam buku ini diperkenalkan variansi vektor efektif (*effective vector variance* disingkat EVV) sebagai ukuran MPV yang komplementer dengan EV . Apabila EV adalah varian dari GP , maka EVV adalah varian dari VP . Definisinya sebagai berikut,

EVV adalah jumlah kuadrat semua nilai eigen dari Σ dibagi p .

Atau

$$EVV = \frac{1}{p} Tr(\Sigma^2).$$

Formula ini mengatakan bahwa EVV adalah *arithmetic mean* dari semua kuadrat nilai eigen dari Σ . Bandingkanlah dengan EV yang berupa *geometric mean* dari semua nilai eigen dari Σ . Dan, seperti halnya EV , EVV juga dapat digunakan untuk membandingkan variabilitas beberapa proses kompleks sejenis yang melibatkan sejumlah CTQ yang berbeda.

Itulah berbagai ukuran statistik untuk target proses dan variabilitas proses, baik proses sederhana maupun proses kompleks. Pada bab-bab selanjutnya dalam buku ini, diskusi akan difokuskan kepada pengontrolan proses kompleks yang meliputi MPT dan MPV untuk ketiga skenario sampling pertama. Skenario sampling pertama berbasis, observasi individual, skenario sampling kedua berbasis sub-grup berukuran konstan, dan skenario sampling ketiga berbasis sub-grup berukuran tak konstan. Sedangkan skenario sampling keempat berbasis sub-grup dengan CTQ yang berbeda. Diskusi akan dimulai dengan pengontrolan MPT yang bertumpu pada penggunaan statistik T^2 Hotelling.

Lalu, dilanjutkan dengan pengontrolan MPV untuk ketiga skenario sampling tersebut di atas. Dalam hal ini, pada skenario sampling pertama digunakan statistik W (Wilks) untuk membuat diagram kontrol W . Sedangkan pada skenario sampling kedua dan ketiga digunakan statistik GP dan sekaligus statistik VP (Djahuri dkk. (2008)). Kedua statistik yang disebut terakhir akan menghasilkan diagram kontrol GP dan diagram kontrol VP yang saling komplementer; yang satu melengkapi yang lain. Oleh karena itu, kedua diagram ini sangat dianjurkan untuk digunakan bersama-sama pada pengontrolan MPV berbasis sub-grup; baik berukuran konstan maupun tak konstan.

Diskusi dalam buku ini akan diakhiri dengan pengontrolan MPV untuk skenario sampling keempat, yakni berbasis sub-grup dengan CTQ yang berbeda.

Sebagai penutup bab ini, perlu dicatat bahwa:

1. Pada pengontrolan proses sederhana (UVSPC), dari sekian banyak statistik yang telah diciptakan para statistisi untuk menjelaskan target proses, hanya *mean* yang paling populer dan paling luas penggunaannya.
2. Begitu juga dengan variabilitas proses. Di antara sekian banyak ukuran variabilitas proses sederhana, hanya deviasi standar, variansi dan *range* yang biasa digunakan pada UVSPC.
3. Dalam MVSPC, hanya vektor *mean* sampel yang paling populer digunakan sebagai ukuran MPT. Sementara itu, sebagai ukuran MPV digunakan matriks kovariansi.

4. Karena struktur kovariansi dan korelasi sangat kompleks tatkala banyak CTQ yang terlibat, MPV menjadi sulit diukur, diatur, dikontrol dan dikelola. Bagi para statistisi, masalah ini masih terbuka untuk diteliti dan dikembangkan.
5. Dua ukuran MPV yang paling penting adalah GV dan VV . Sedangkan penggunaan ukuran-ukuran yang lain seperti TV , $SRGV$, RGV , dan MVE masih belum banyak mengalami perkembangan. Penggunaannya tidak seluas dan sepopuler GV dan VV .

BAB 3

STRATEGI PENGONTROLAN PROSES KOMPLEKS

Diagram kontrol adalah alat utama dalam pengontrolan kualitas proses secara statistik (SPC) untuk mendiagnosa apakah proses dalam keadaan stabil (*in-control* disingkat IC) atau tidak stabil. Bahan baku untuk membuat diagram ini adalah sampel acak yang diambil pada setiap periode waktu tertentu; artinya, pada setiap saat pengontrolan atau setiap titik observasi. Dari bahan baku ini, langkah pertama adalah membuat statistik yang sesuai dengan tujuan pengontrolan; apakah mengontrol MPT ataukah mengontrol MPV. Peran statistik pengontrol ini mirip dengan peran statistik penguji (*statistical test*) pada pengujian hipotesis.

Langkah berikutnya adalah menyelidiki perilaku distributional dari statistik pengontrol tersebut. Distribusi ini diperlukan untuk menentukan batas-batas kontrol dari diagram kontrol yang umumnya terdiri atas dua batas kontrol yakni batas bawah dan batas atas. Dan, langkah terakhir adalah membuat diagram kontrol. Untuk ini, terlebih dahulu kita hitung nilai statistik pengontrol pada setiap saat observasi. Nah, yang namanya diagram kontrol adalah diagram yang menampilkan sekaligus:

1. Nilai statistik pengontrol, dan
2. Kurva batas (atau batas-batas) kontrol.

Sederhana, bukan? Bila pada diagram kontrol itu nilai statistik pengontrol yang kita hitung berada di dalam daerah kontrol, artinya berada di antara batas bawah dan batas atas kontrol, maka itu pertanda (*signal/alarm*) bahwa proses berada dalam keadaan stabil (IC). Itu adalah sinyal bahwa proses dapat terus dilanjutkan. Sebaliknya, bila pada suatu titik observasi diperoleh nilai statistik pengontrol yang berada di luar daerah kontrol, maka itu adalah pertanda bahwa pada saat itu proses berada dalam keadaan *out-of control* (OOC). Kemungkinan besar proses tidak stabil. Artinya, pada saat itu juga diperlukan penyelidikan lebih lanjut apakah sinyal tersebut berupa alarm palsu (*false alarm*) ataukah alarm tulen (*true alarm*). Dalam hal terjadi alarm palsu, maka proses dapat terus dilanjutkan. Jika yang terjadi adalah alarm tulen, proses harus segera diberi perlakuan khusus.

1. Sampel Acak pada MVSPC

Dalam buku ini, kecuali jika diberitahukan lain, sebuah sampel acak berukuran n diberi lambang $X_1, X_2, \dots, X_n$. Sampel tersebut akan selalu diasumsikan berasal dari populasi X yang berdistribusi normal p -variat (*multivariate*) dengan vektor mean μ dan matriks

kovariansi Σ yang definit positif. Untuk selanjutnya kita tuliskan $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$. Di sini p adalah banyaknya CTQ atau variabel (dimensi) yang terlibat dalam menentukan kualitas dan diasumsikan $p < n$.

Bentuk umum kedua parameter μ dan Σ , jika ditulis secara lengkap, adalah sebagai berikut.

$$\mu = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_p \end{pmatrix} \text{ dan } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{\mu}_i$ adalah mean populasi variabel ke- i dan σ_{ij} (elemen non-diagonal pada baris ke- i dan kolom ke- j) adalah kovariansi populasi dari variabel ke- i dan variabel ke- j . Dengan demikian, σ_{ii} (elemen diagonal ke- i) adalah variansi variabel ke- i . Matriks Σ ini bersifat simetris, sebab $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ untuk i dan j yang mana pun.

Begitu kita berbicara tentang sampel acak seperti tersebut di atas, di mana μ dan Σ tidak diketahui, maka kedua parameter ini harus kita taksir terlebih dahulu oleh vektor *mean* sampel dan matriks kovariansi sampel yang kita beri lambang $\bar{X}$ dan S . Selanjutnya, kita tuliskan,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix} \text{ dan } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{pp} \end{pmatrix}$$

Nah, $\bar{x}_j$ adalah mean sampel variabel ke- j dan s_{ij} adalah kovariansi sampel dari variabel ke- i dan variabel ke- j . Jadi, s_{ii} adalah variansi sampel variabel ke- i .

Tatkala data dari sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ sudah tersedia, maka data tersebut biasanya disajikan dalam bentuk matriks berukuran $(n \times p)$ dan disebut matriks data. Ini adalah matriks yang terdiri atas n buah baris dan p buah kolom seperti berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{np} \end{pmatrix}$$

Di sini, x_{ij} adalah data hasil observasi ke- i dari variabel ke- j . Dengan demikian, *mean* sampel variabel ke- j adalah $\bar{x}_j$ yang diberikan oleh,

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \text{ dan } S = \frac{1}{n-1} AA^t$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 & \dots & x_{1p} - \bar{x}_p \\ x_{21} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \dots & x_{2p} - \bar{x}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} - \bar{x}_1 & x_{n2} - \bar{x}_2 & \dots & x_{np} - \bar{x}_p \end{pmatrix}.$$

Dengan kata lain, A adalah matriks data terpusat (data dipusatkan terhadap vektor *mean* sampel). Sedangkan notasi “superscript t ” pada A^t di ruas paling kanan menyatakan operasi *transpose*. Dan, cara menghitung $\bar{X}$ dan S dalam bentuk operasi vektor menjadi sebagai berikut,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ dan } S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t.$$

Matriks S , seperti halnya Σ , juga bersifat simetris. Jadi, $s_{ij} = s_{ji}$. Dan, karena diasumsikan $n > p$, S juga bersifat definit positif. Artinya, S memiliki inversi. Jika inversi tersebut kita sebut S^{-1} , maka berlaku $SS^{-1} = S^{-1}S = I_p$ (matriks satuan atau matriks identitas berukuran $(p \times p)$), yakni;

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Makna Geometris Matriks Data

Vektor *mean* sampel $\bar{X}$ dan matriks kovariansi sampel S adalah dua sumber informasi utama dalam setiap MVSPC. Mengingat peran penting inilah, maka kita perlu memahami apa makna yang tersembunyi dibalik kedua statistik $\bar{X}$ dan S . Selain $\bar{X}$ dan S ada satu lagi sumber informasi utama yang lain yakni apa yang disebut matriks korelasi, sebut saja R , yang bersesuaian dengan S . Ketiga sumber informasi $\bar{X}$, S dan R secara bersama-sama akan memberikan interpretasi geometris bagi matriks data.

Mari kita tengok terlebih dahulu matriks korelasi R yang bersesuaian dengan matriks kovariansi S . Yang dimaksud adalah matriks berikut.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pp} \end{pmatrix}.$$

Matriks ini diperoleh dari S melalui transformasi $r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}$. Besaran r_{ij} inilah yang disebut koefisien korelasi sampel antara variabel ke- i dan variabel ke- j . Dalam bahasa

geometri, jika θ_{ij} menyatakan sudut antara vektor variabel terpusat (vektor kolom pada matriks data terpusat) ke- i dan ke- j , maka $r_{ij} = \cos(\theta_{ij})$. Oleh karena itulah, maka,

1. $r_{ii} = 1$ (diagonal elemen ke- i) untuk semua $i = 1, 2, \dots, p$
2. $-1 \leq r_{ij} \leq 1$

Berdasarkan makna geometris tersebut, vektor $\bar{X}$ dan kedua matriks S dan R menyajikan informasi yang lengkap tentang:

1. Konfigurasi geometris (*scatter diagram*) n buah titik data di ruang CTQ berdimensi p , sebut saja $E = R^p$, dan
2. Konfigurasi p buah titik variabel terpusat di ruang observasi berdimensi n , sebut saja $F = R^n$.

Di dalam F , panjang vektor dan sudut antara dua vektor memiliki makna statistik berikut. Panjang variabel ke- i adalah $\sqrt{s_{ii}}$ (akar dari elemen diagonal ke- i dari matriks kovariansi S) yang tidak lain merupakan deviasi standar variabel ke- i . Lalu, besarnya sudut antara vektor variabel terpusat ke- i dan ke- j adalah $\theta_{ij} = \arccos(r_{ij})$; besar kecilnya sudut menyatakan kecil besarnya korelasi.

Dengan cara pandang seperti itu, matriks korelasi R sendiri dapat dibaca sebagai representasi numerik dari p buah titik/vektor variabel terpusat pada permukaan bola berdimensi p dengan radius 1 di F . Setiap titik tersebut menyatakan variabel standar (baku); *mean* 0 dan variansi 1. Jadi, dengan melihat S dan R , imajinasi atau matahati kita melihat awan (*cloud*) n buah titik data di E dengan pusatnya di $\bar{X}$ dan awan p buah titik variabel baku di F dengan pusatnya 0 (vektor 0).

Cara pandang terhadap sampel seperti di atas akan sangat membantu dalam mengoperasionalkan MVSPC yakni pengontrolan kualitas proses yang kompleks. Khususnya tatkala (1) membuat diagram kontrol, dan (2) membaca pesan yang tersembunyi di dalam diagram kontrol tersebut. Berdasarkan pandangan itu, pada bab ini terlebih dahulu akan dikemukakan strategi pengontrolan. Kemudian diikuti bab-bab berikutnya dengan membahas perilaku distribusional dari statistik pengontrol yang merupakan pilar MVSPC. Statistik pengontrol dan perilaku distribusional inilah yang akan menentukan pembuatan dan pengoperasionalan diagram kontrol dalam MVSPC.

Tiga bab berikutnya, yakni Bab 4 sampai dengan Bab 6 berturut-turut akan mengemukakan formula dan perilaku distribusional dari statistik pengontrol T^2 Hotelling. Selanjutnya, Bab 7 khusus membahas statistik pengontrol W . Kemudian, statistik pengontrol GV dan statistik pengontrol VV dibahas pada Bab 8 dan Bab 9 untuk skenario sampling kedua. Sedangkan untuk skenario sampling ketiga dibahas pada Bab 10 dan Bab 11. Bab terakhir pengontrolan kualitas proses kompleks, yakni Bab 12, membahas statistik pengontrol EV dan EVV . Untuk memberikan ilustrasi tentang praktik pengontrolan, semua pembahasan tersebut di atas akan disertai dengan contoh-contoh aplikasinya.

Catatan:

Untuk selanjutnya, semua parameter populasi ditulis dalam huruf Yunani. Sedangkan taksiran sampelnya ditulis dengan huruf Latin. Umpamanya, μ dan Σ melambangkan vektor mean populasi dan matriks kovariansi populasi. Pada tataran sampel, vektor mean sampel dan matriks kovariansi sampel diberi lambang $\bar{X}$ dan S .

3. Strategi Pengontrolan

Secara umum, strategi pelaksanaan SPC terdiri atas dua tahap berikut.

- 1) Tahap Pertama, dikenal dengan istilah Tahap I, merupakan tahap persiapan atau *start-up stage*. Tujuan tahap ini adalah untuk mendapatkan sekelompok data yang stabil atau IC (*in-control*); artinya sekelompok data yang berada di daerah kontrol Tahap I. Kelompok data ini, yang dikenal sebagai *historical data set (HDS)*, diperlukan untuk menaksir target proses μ dan variabilitas proses Σ .
- 2) Tahap Kedua, dikenal dengan istilah Tahap II, adalah tahap implementasi hasil penaksiran yang diperoleh pada Tahap I. Pada tahap kedua ini ditentukan batas-batas kontrol; batas atas kontrol dan/atau batas bawah kontrol dari diagram kontrol Tahap II. Lalu diikuti dengan proses pengontrolan.

Dalam praktik, Tahap I dimulai dengan pengumpulan m kelompok (sub-grup) data acak masing-masing berukuran n tertentu yang besarnya ditentukan oleh penanggung jawab urusan kualitas proses. Dalam literatur tentang SPC, disarankan m antara 20 dan 30. Lalu, untuk setiap kelompok data dihitung nilai statistik pengontrol yang digunakan. Setelah diperoleh m buah nilai statistik pengontrol, kemudian dibandingkan dengan nilai batas-batas kontrol. *HDS* adalah semua kelompok data yang memberikan nilai statistik pengontrol tidak melebihi batas atas dan tidak kurang dari batas bawah.

Perlu dicatat dan diperhatikan bahwa, walaupun statistik pengontrol yang digunakan pada diagram kontrol di kedua tahap itu sama, namun perilaku distribusinya bisa berbeda. Dengan demikian, batas-batas kontrol di Tahap I bisa berbeda dengan di Tahap II.

BAGIAN II

PENGONTROLAN TARGET PROSES

- Pengontrolan target proses kompleks bertumpu pada tiga jenis distribusi; Beta, Chi-Squared dan F
- Ketiga distribusi itu muncul dalam pembahasan Bab 4, sementara Chi-Squared dan F muncul di Bab 5, sedangkan Bab 6 hanya melibatkan Chi-Squared
- PFA diterapkan untuk satu sisi (one sided) tatkala salah satu dari ketiga distribusi itu menjadi tumpuan
- Dalam praktik, $PFA = 0,0027$ biasa digunakan pada proses industri manufaktur dan $PFA = 0,05$ pada proses industri jasa

BAB 4

TEKNIK BERBASIS OBSERVASI INDIVIDUAL: STATISTIK T^2

Statistik T^2 dirintis oleh Hotelling (1931) kemudian dipopulerkan oleh orang yang sama dalam Hotelling (1947). Statistik ini adalah versi multidimensi (*multivariate*) dari statistik “Student’s t ” yang sangat populer di kalangan para pengguna statistika.

Apabila statistik “ t ” diciptakan untuk mengkaji *mean* populasi (target proses sederhana) dalam kasus distribusi univariat ($p = 1$), statistik T^2 adalah untuk mengkaji target proses yang kompleks atau dengan kata lain proses multivariat ($p > 1$).

Statistik “Student’s t ” diciptakan oleh William S. Gosset sekitar tahun 1907; 25 tahun sebelum Hotelling merintis T^2 sebagai versi multivariat dari “ t ”. Amat penting untuk dijadikan bahan renungan bahwa Gosset menciptakan *student’s t test* untuk mengontrol target proses produksi bir (*beer*) di pabrik bir terkenal di kota London. Dia tahu bahwa, jika sebuah sampel acak berukuran n diambil dari populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ dan deviasi standar σ , maka perilaku distribusional rata-rata sampel $\bar{X}$ adalah sebagai berikut:

1. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ berdistribusi normal standar untuk berapapun nilai n ,
2. $\frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}}$, di mana s adalah deviasi standar sampel, memiliki distribusi yang semakin mirip dengan distribusi normal standar apabila nilai n semakin besar. Apa yang akan terjadi jika n kecil?

Masalah yang dihadapi Gosset di industri bir tersebut adalah: “mahalnya biaya memperbesar nilai n ”. Artinya, dia harus bekerja dengan n yang kecil. Namun, untuk bekerja dalam kondisi demikian, dia terbentur dengan masalah perilaku distribusional rata-rata sampel $\bar{X}$. Setelah melalui berbagai tantangan dan rintangan matematikal, pada akhirnya Gosset berhasil membuktikan bahwa tatkala n kecil,

1. $\frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}}$ memiliki distribusi dengan *probability density function* (pdf) yang berpuncak tunggal, simetris, dan menyempit ke kiri maupun ke kanan, mirip seperti pdf dari distribusi normal standar.
2. Semakin besar nilai n , tingkat kemiripan distribusi tersebut dan distribusi normal standar semakin tinggi. Distribusi itu sekarang populer dengan nama distribusi student’s t dengan derajat kebebasan $(n - 1)$ disingkat $t_{(n-1)}$.

3. Secara matematikal, jika ukuran sampel n diperbesar menuju tak hingga, maka $t_{(n-1)}$ menuju $N(0, 1)$. Seberapa besar n sehingga $t_{(n-1)}$ dapat didekati oleh $N(0, 1)$? Apakah $n = 30$ cukup? Tidak ada rumus umum; tergantung kepada kasus yang dihadapi! Kalau ingin mengetahuinya, jalan terbaik adalah dengan melakukan simulasi.

Catatan:

Latar belakang keilmuan Gosset adalah kimia. Bukan matematika. Bukan juga statistika. Kemahiran dia dalam bermatematika adalah buah dari budaya akademis di Universitas Oxford; lembaga pendidikan tinggi almamater dia. Tradisi mereka adalah tradisi yang memiliki basis pengetahuan mendalam dan kokoh dalam bidang *Formal Sciences*.

Dalam pengontrolan target proses, kedua statistik t dan T^2 memiliki kesamaan. Keduanya bekerja berlandaskan sampel acak. Oleh karena itu, mengingat sampel acak adalah paspor untuk menggunakan analisis statistik, maka pengertian sampel acak harus diperjelas terlebih dahulu.

Secara formal, yang namanya sampel acak berukuran n , sebut saja $X_1, X_2, \dots, X_n$, adalah n buah variabel acak yang saling bebas dan memiliki perilaku distribusional yang sama (atau identik) dengan distribusi populasinya. Jika populasinya berdistribusi normal, sebut saja $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, maka $X_1, X_2, \dots, X_n$ saling bebas dan

$$X_1 \sim N_p(\mu, \Sigma), X_2 \sim N_p(\mu, \Sigma), \dots, \text{ dan } X_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

Di sini tanda *tilde* “~” adalah pengganti dari kata “berdistribusi.” Akibat dari definisi tersebut, silahkan lihat Anderson (1966, 1984) dan Hogg dan Craig (1978), maka untuk setiap k dari 1, 2, ..., n , variabel acak T_k^2 berikut ini berdistribusi chi-squared dengan derajat kebebasan p .

$$T_k^2 = (X_k - \mu)^t \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \sim \chi_p^2. \quad (4.1)$$

dan $T_1^2, T_2^2, \dots, T_n^2$ saling bebas. Formula (4.1) ini adalah formula generik untuk mengontrol target proses pada ketiga skenario sampling di bawah ini.

1. Pengontrolan berbasis observasi individual,
2. Pengontrolan berbasis sub-grup berukuran konstan, dan
3. Pengontrolan berbasis sub-grup berukuran tak konstan.

Bab ini akan membahas teknik pengontrolan target proses untuk skenario sampling yang pertama. Kedua skenario sampling berikutnya akan dibahas pada dua bab setelah ini.

1. Langkah Persiapan

Pengontrolan target proses berbasis observasi individual dilakukan dengan menggunakan sampel berukuran $n = 1$ pada setiap saat observasi. Artinya, cukup 1 buah data untuk mengontrol kinerja proses. Statistik pengontrolannya dikembangkan berdasarkan formula (4.1). Apabila μ dan Σ diketahui, formula tersebut bisa langsung digunakan. Namun, tatkala parameter ini tidak diketahui, statistik pengontrolannya dikembangkan dari (4.1) dengan terlebih

dahulu menaksir μ dan Σ berdasarkan m buah sampel yang saling bebas, dan secara umum untuk $n \geq 1$ berbentuk sebagai berikut,

Sampel pertama : $X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1,$

Sampel kedua : $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2,$

.....

Sampel ke- m : $X_1^m, X_2^m, \dots, X_n^m.$

Catatan:

1. Indeks atas (*superscript*) menunjukkan nomor sampel dan indeks bawah (*subscript*) menyatakan unit sampel.
2. Besarnya m biasanya antara 20 dan 30 untuk setiap skenario sampling.

Nah, berdasarkan m buah sampel yang saling bebas tersebut, terlebih dahulu dilakukan penaksiran terhadap μ dan Σ . Tahap penaksiran ini selanjutnya disebut Tahap I. Setelah μ dan Σ ditaksir, dan hasilnya disubstitusikan ke dalam formula (4.1), maka kita peroleh statistik pengontrol beserta perilaku distribusinya yang berbeda dengan (4.1). Secara umum, dapat kita katakan bahwa penggunaan penaksir parameter mengakibatkan perubahan pola perilaku.

Berikut adalah prosedur pengontrolan target proses berbasis observasi individual; dimulai dengan Tahap I (tahap penaksiran parameter) dan dilanjutkan dengan Tahap II (tahap pengontrolan). Pembaca yang tertarik mempelajari lebih rinci tentang kedua tahap ini, dipersilahkan melihat Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019), Tracy dkk. (1992), Mason dkk. (1995) dan berbagai literatur lainnya.

2. Bila μ dan Σ Diketahui

Tahap I

Untuk kasus di mana μ dan Σ diketahui, Tahap I tidak diperlukan. Langsung saja ke Tahap II. Dari mana kita tahu nilai μ dan Σ ? Dari pengalaman dalam melakukan pengontrolan yang serupa. Atau diberitahu seperti umpamanya spesifikasi (*engineering specification*) dalam proses industri manufaktur.

Tahap II

Karena μ dan Σ diketahui, langsung kita buat diagram kontrol T^2 sebagai berikut.

Langkah I: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data yang berupa vektor berdimensi p . Sebut saja vektor data itu X . Bentuknya sebagai berikut,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

di mana x_j adalah data tentang variabel ke- j ; j bergerak dari 1 sampai dengan p .

- Langkah 2:* Memusatkan data; menghitung $(X - \mu)$ untuk setiap data sampel.
- Langkah 3:* Hitung matriks Σ^{-1} yakni inversi dari matriks kovariansi Σ .
- Langkah 4:* Hitung $T^2 = (X - \mu)^t \Sigma^{-1} (X - \mu)$.
- Langkah 5:* Hitung $UCL = \chi^2_{\alpha, p}$, yakni kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi chi-squared dengan derajat kebebasan p . Literatur dalam SPC menganjurkan PFA (diberi lambang α) sebesar 0,0027 untuk proses industri manufaktur dan 0,05 untuk proses industri jasa.
- Langkah 6:* Membuat diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai T^2 pada *Langkah 4* bersama dengan nilai UCL.
- Langkah 7:* Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya plot nilai T^2 berada di daerah kontrol (daerah di mana $T^2 < UCL$), lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika nilai T^2 berada di luar daerah kontrol, maka perlu diselidiki apakah terjadi sinyal/alarm yang berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC (*out-of-control*) diikuti dengan upaya peningkatan kualitas proses.

Contoh 4.1.

Pada contoh ini digunakan 25 buah data acak hasil simulasi dari $N_5(0, I_5)$ yang menggambarkan perjalanan kualitas proses sejak pengontrolan pertama sampai dengan pengontrolan ke-25. Dengan demikian, simulasi dilakukan untuk menggambarkan proses yang berdistribusi normal multivariat dengan CTQ sebanyak $p = 5$ di mana vektor mean μ adalah vektor nol berdimensi 5, dan matriks kovariansi Σ berupa matriks identitas (atau disebut juga matriks satuan) berukuran 5. Artinya,

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \Sigma = I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks Σ ini terdiri atas 5 baris dan 5 kolom di mana semua elemen diagonal bernilai 1 dan semua elemen non-diagonal bernilai 0.

Langkah 1: Pengumpulan data

Kedua puluh lima data hasil simulasi disajikan pada Tabel 4.1, kolom kedua sampai dengan keenam. Kolom pertama "Obs" menyatakan nomor urut yang menggambarkan urutan saat pengontrolan. Sedangkan simbol X_1, X_2, X_3, X_4 , dan X_5 menggambarkan kelima variabel yang dijadikan CTQ.

Tabel 4.1. Data hasil simulasi, nilai T^2 , dan UCL

Obs	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	T^2	UCL
1	0,46390	-0,27130	0,69663	-1,63381	0,79956	4,08274	18,20514
2	-2,14614	-1,82181	0,48849	-0,65046	-0,00945	8,58673	18,20514
3	-0,99518	1,12218	-0,35602	0,74009	-1,00997	3,94419	18,20514
4	0,07239	0,00945	1,52133	-0,00975	1,79704	5,54922	18,20514
5	0,63653	-0,77237	-0,66900	0,45667	-0,04932	1,66028	18,20514
6	0,63784	-0,52617	-0,42422	0,71903	-0,59063	1,72951	18,20514
7	-0,02368	0,26591	-0,24095	0,20651	0,85614	0,90496	18,20514
8	-0,37450	1,73005	0,59922	1,00236	-0,62915	4,89293	18,20514
9	-0,34683	-0,14814	-1,66389	0,30383	0,04373	3,00501	18,20514
10	0,15070	1,04935	-0,53983	-4,42727	-0,49497	21,26096	18,20514
11	0,35757	-2,04956	-0,10565	1,08615	0,35317	5,64418	18,20514
12	-1,08850	-0,17558	-0,37057	-0,67073	0,92753	2,66317	18,20514
13	-0,14088	0,76774	0,03814	-1,02888	3,52273	14,07893	18,20514
14	0,67956	-1,10878	1,14075	-1,76673	0,73909	6,66009	18,20514
15	0,50911	1,10595	-0,74040	0,27011	-0,60582	2,47050	18,20514
16	0,05691	0,14281	1,30947	0,02850	-0,72141	2,25960	18,20514
17	0,59127	0,85053	-1,69107	-0,81301	0,08375	4,60071	18,20514
18	-0,85924	0,08659	-0,96147	0,21888	-1,66176	4,47957	18,20514
19	0,29152	0,65813	0,05560	-0,26520	0,08498	0,59877	18,20514
20	-1,44375	0,91584	-1,05588	-0,41595	-0,91572	5,04962	18,20514
21	2,03723	0,45370	-0,46893	-0,63794	-1,32846	6,74782	18,20514
22	0,43420	0,38009	-0,82284	-0,19964	-0,07239	1,05517	18,20514
23	0,96598	0,13076	0,70053	0,20753	0,47989	1,71431	18,20514
24	0,24844	0,24055	-0,92648	2,36676	0,08198	6,58622	18,20514
25	-0,68865	1,08243	-0,03638	0,17551	0,96732	2,61373	18,20514

Catatan:

Data pada tabel ini disajikan sampai 5 desimal hanya untuk menggambarkan tingkat ketelitian perhitungan.

Langkah 2: Memusatkan data; menghitung $(X - \mu)$

Karena μ berupa vektor nol, maka data pada Tabel 4.1 otomatis sudah terpusat.

Langkah 3: Menghitung matriks Σ^{-1} inversi dari Σ

Karena Σ berupa matriks identitas I_5 , maka $\Sigma^{-1} = \Sigma = I_5$.

Langkah 4: Menghitung T^2

Mengingat $\mu = 0$ dan $\Sigma = I_5$, komputasi statistik T^2 menjadi sederhana (bahkan menjadi yang paling sederhana). Caranya sebagai berikut. Untuk setiap baris pada Tabel 4.1, T^2 adalah jumlah kuadrat elemen-elemen pada baris tersebut yang berada di kolom kedua sampai dengan keenam. Umpamanya, untuk baris kelima,

$$\begin{aligned} T^2 &= \sum_{j=1}^5 x_{5j}^2 \\ &= 0,63653^2 + -0,77237^2 + -0,66900^2 + 0,45667^2 + -0,04932^2 \\ &= 1,66028 \text{ (elemen pada baris kelima di kolom ketujuh).} \end{aligned}$$

Nilai statistik T^2 untuk semua pengontrolan (observasi) disajikan di kolom ketujuh pada Tabel 4.1.

Langkah 5: Menghitung UCL

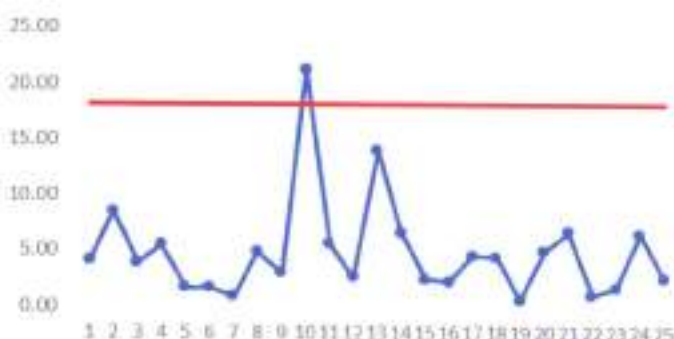
UCL sama dengan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi chi-squared dengan derajat kebebasan 5. Untuk $\alpha = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh

$$\text{UCL} = \text{"=CHIINV(0.0027,5)"} = 18,20514.$$

Untuk setiap observasi, nilai UCL sama dan disajikan pada kolom terakhir Tabel 4.1 di atas.

Langkah 6: Membuat diagram kontrol T^2

Jika data nilai T^2 dan nilai UCL pada Tabel 4.1 kita plot pada diagram yang sama, maka kita peroleh diagram kontrol T^2 seperti tampak pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Diagram kontrol T^2 pada Tahap II untuk Contoh 4.1

Pada gambar ini,

1. Sumbu vertikal adalah sumbu yang menyatakan nilai statistik T^2 .
2. Sumbu horizontal menyatakan nomor urut saat pengontrolan.

3. Titik-titik berwarna biru yang dihubungkan oleh garis lurus berwarna biru juga menampilkan nilai-nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{25}^2$.
4. Garis lurus berwarna merah menyatakan UCL.

Catatan:

Untuk selanjutnya, di dalam buku ini cara menggambarkan diagram kontrol seperti pada gambar di atas akan tetap dipertahankan kecuali bila ada modifikasi.

Langkah 7: Proses dalam keadaan terkontrol?

Gambar 4.1 menunjukkan sejarah kinerja proses dari waktu ke waktu. Seperti tampak pada gambar itu, sejak observasi pertama sampai dengan kesembilan proses berjalan aman. Pada pengontrolan kesepuluh, terjadilah OOC. Lalu, setelah dilakukan penyelidikan terhadap kejadian tersebut, mulai pengontrolan kesebelas dan selanjutnya proses kembali berjalan dengan aman.

Dalam praktik, begitu diagram kontrol memberikan sinyal OOC, maka perlu segera dilakukan penyelidikan apakah sinyal itu berupa sinyal palsu (*false alarm*) atau sinyal tulen (*true alarm*). Kalau ternyata sinyal palsu, pengontrolan dilanjutkan dengan yang kesebelas, keduabelas, ..., dsb. Namun, kalau sinyal itu berupa sinyal tulen, penyelidikan lebih lanjut harus dilakukan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC. Nah, semua kegiatan penyelidikan terhadap OOC dari mulai penyelidikan apakah sinyal OOC berupa sinyal palsu atau sinyal tulen sampai dengan penyelidikan untuk menemukan akar penyebab, berada di ranah manajemen proses.

Sebagai catatan penutup untuk contoh ini, pada gambar di atas tampak bahwa setelah pengontrolan kesepuluh sampai dengan keduapuluhlima, proses kembali berjalan aman; nilai statistik T^2 berada di daerah kontrol (lebih kecil dari nilai UCL).

3. Bila μ dan Σ Tidak Diketahui

Dalam praktik SPC sehari-hari, umumnya μ dan Σ tidak diketahui. Jika demikian, kedua parameter tersebut harus kita taksir terlebih dahulu sebelum kegiatan pengontrolan dapat dilaksanakan. Nah, tampak bahwa seluruh kegiatan pengontrolan kualitas proses terdiri atas dua tahap. Pertama, tahap penaksiran parameter disebut juga Tahap I. Kedua, tahap pengontrolan atau Tahap II.

Tahap I

Berikut adalah langkah-langkah pelaksanaan Tahap I.

Langkah 1: Ambil m buah sampel yang saling bebas. Misalkan m sampel ini kita sebut $X^1, X^2, \dots, X^m$. Karena masing-masing sampel berbentuk vektor data, maka kita memiliki m buah vektor data seperti ini,

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_p^1 \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_p^2 \end{pmatrix}, \dots, X^m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ \vdots \\ x_p^m \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Hitung $\bar{X}$ vektor rata-rata dari m sampel tersebut, yakni

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sampel, lakukan pemusatan data. Data terpusat untuk sampel ke- k adalah,

$$X^k - \bar{X},$$

di mana k bergerak dari 1 sampai dengan m .

Langkah 4: Hitung matriks kovariansi sampel,

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X^i - \bar{X})(X^i - \bar{X})^t.$$

Langkah 5: Hitung S^{-1} yakni matriks inversi dari matriks S .

Langkah 6: Pada setiap sampel, hitung nilai statistik T^2 . Untuk sampel ke- k , nilai statistik itu adalah

$$T_k^2 = (X^k - \bar{X})^t S^{-1} (X^k - \bar{X}),$$

di mana k bergerak dari 1 sampai dengan m .

Langkah 7: Hitung batas atas $UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha;u,v}$ seperti yang dikemukakan Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019) dan Tracy dkk. (1992). Di sini, $\beta_{\alpha;u,v}$ adalah kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $u = p/2$ dan $v = (m-p-1)/2$. Seperti telah dikemukakan di depan, $\alpha = 0,0027$ untuk proses industri manufaktur dan 0,05 untuk proses industri jasa.

Langkah 8: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ beserta nilai UCL pada satu diagram yang sama.

Langkah 9: Bila di antara statistik $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ ada M buah statistik yang berada di dalam daerah kontrol (nilainya lebih kecil dari UCL), hitunglah rata-rata dan matriks kovariansi dari himpunan data M buah sampel yang bersesuaian. Himpunan data ini biasa disebut himpunan data historis atau *historical data set* disingkat *HDS*. Kemudian, rata-rata *HDS* dan matriks kovariansi *HDS* berturut-turut diberi lambang $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} . Tentu $M \leq m$. Nah, bila semua statistik $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ berada di dalam daerah kontrol, artinya $M = m$, maka $\bar{X}$ dan S yang diperoleh pada Langkah 2 dan Langkah 4 untuk selanjutnya diberi lambang $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} .

Langkah 10: Nilai $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang diperoleh di akhir Tahap I selanjutnya digunakan sebagai nilai taksiran untuk μ dan Σ pada Tahap II.

Contoh 4.2.

Langkah 1: Ambil m buah sampel yang saling bebas.

Sampel yang digunakan pada contoh ini adalah sampel hipotetikal sebanyak $m = 29$ sampel yang saling bebas, dari proses dengan 4 buah CTQ: A , B , C , dan D . Sampel tersebut kita beri lambang $X^1, X^2, \dots, X^{29}$ dan akan kita gunakan untuk memberi ilustrasi bagaimana penaksiran terhadap μ dan Σ dilaksanakan pada Tahap I.

Adapun data hipotetikal dari $m = 29$ buah sampel itu disajikan pada Tabel 4.2. Data tentang X^1 pada baris pertama, data X^2 pada baris kedua ..., data X^{29} pada baris ke-29. Baris terakhir adalah rata-rata data.

Tabel 4.2. Data hipotetikal yang disusun baris per baris

Sampel	A	B	C	D
1	0,45167	-0,48367	0,13038	0,36566
2	1,76564	1,61521	0,62236	-0,90150
3	-1,03226	-1,01010	0,97998	-0,05790
4	0,21833	-0,44532	0,75436	0,35390
5	-1,32846	0,28052	-1,64496	1,19086
6	0,00363	1,60238	0,91875	1,01700
7	0,14644	-2,30695	-1,06554	0,39609
8	0,14768	-0,78730	-0,83135	0,17558
9	-0,32368	-1,29802	0,70700	0,70936
10	0,52731	0,80802	-2,02519	0,98318
11	0,57378	-0,35480	0,96330	0,50937
12	0,71903	-0,59063	0,28873	0,41837
13	0,20651	0,85614	1,44549	0,12560
14	1,00236	-0,62915	-1,28272	0,06480
15	0,30383	0,04373	-1,16604	0,02529
16	-4,42727	-0,49497	-1,72461	0,07953
17	-0,22107	2,62015	0,55423	1,22109
18	0,29120	-1,63819	0,66175	0,31901
19	0,53039	0,19941	-0,04879	-0,29112
20	-1,19008	-1,38291	-0,72967	0,82338
21	0,25278	1,56225	1,21787	0,54533
22	-0,16619	0,78013	-0,19613	0,40779
23	-0,47098	-2,05207	1,18081	-0,77423
24	1,24232	0,52757	0,11804	-0,41695
25	-0,11704	-0,50137	0,42012	0,75751
26	1,18296	0,58191	-0,42187	-1,78375
27	-0,41761	1,25517	-0,91852	-0,28857
28	-1,74248	0,23277	-3,48722	-0,79368
29	0,04703	-0,90116	0,26781	1,18589
Rata-rata	-0,06290	-0,06591	-0,14868	0,21962

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata $\bar{X}$.

Dari tabel data ini, baris terakhir, kita peroleh vektor rata-rata $\bar{X}$ sebagai berikut.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} -0,06290 \\ -0,06591 \\ -0,14868 \\ 0,21962 \end{pmatrix}$$

Langkah 3: Memusatkan data.

Sekarang, kita lakukan pemusatan data dengan cara mengurangi data asli pada Tabel 4.2 oleh rata-ratanya; $(X^* - \bar{X})$. Hasilnya disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Data terpusat

Sampel	A	B	C	D
1	0,51457	-0,41776	0,27906	0,14604
2	1,82854	1,68111	0,77103	-1,12112
3	-0,96936	-0,94419	1,12865	-0,27752
4	0,28123	-0,37942	0,90303	0,13429
5	-1,26555	0,34643	-1,49628	0,97124
6	0,06654	1,66828	1,06743	0,79739
7	0,20935	-2,24105	-0,91687	0,17648
8	0,21059	-0,72140	-0,68268	-0,04403
9	-0,26078	-1,23211	0,85568	0,48974
10	0,59021	0,87392	-1,87651	0,76557
11	0,63668	-0,28889	1,11198	0,28976
12	0,78194	-0,52473	0,43741	0,19875
13	0,26942	0,92205	1,59417	-0,09402
14	1,06526	-0,56324	-1,13404	-0,15482
15	0,36674	0,10964	-1,01736	-0,19433
16	-4,36436	-0,42906	-1,57593	-0,14009
17	-0,15817	2,68605	0,70290	1,00147
18	0,35411	-1,57228	0,81042	0,09940
19	0,59329	0,26531	0,09989	-0,51074
20	-1,12717	-1,31701	-0,58099	0,60376
21	0,31568	1,62816	1,36655	0,32571
22	-0,10328	0,84603	-0,04745	0,18817
23	-0,40808	-1,98617	1,32949	-0,99385
24	1,30523	0,59348	0,26672	-0,63656
25	-0,05414	-0,43547	0,56880	0,53789
26	1,24587	0,64782	-0,27320	-2,00336
27	-0,35471	1,32107	-0,76984	-0,50819
28	-1,67958	0,29867	-3,33854	-1,01330
29	0,10993	-0,83525	0,41649	0,96628

Langkah 4: Menghitung matriks kovariansi S .

Dari tabel data itu pula kita peroleh matriks kovariansi sampel S berikut ini,

$$S = \begin{pmatrix} 1,30041 & 0,24013 & 0,49913 & -0,13062 \\ 0,24013 & 1,38511 & 0,04588 & 0,00210 \\ 0,49913 & 0,04588 & 1,35682 & 0,08427 \\ -0,13062 & 0,00210 & 0,08427 & 0,48997 \end{pmatrix}$$

Langkah 5: Mengitung S^{-1} yakni matriks inversi dari matriks S .

Adapun inversi dari matriks kovariansi S yakni S^{-1} adalah,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,97375 & -0,15695 & -0,37305 & 0,32442 \\ -0,15695 & 0,74807 & 0,03562 & -0,05117 \\ -0,37305 & 0,03562 & 0,88873 & -0,25246 \\ 0,32442 & -0,05117 & -0,25246 & 2,17105 \end{pmatrix}$$

Langkah 6: Menghitung nilai statistik T^2 .

Langkah ini dibagi dalam dua bagian. *Pertama*, menghitung perkalian antara data terpusat $(X^k - \bar{X})$ pada Langkah 3 dengan matriks S^{-1} pada Langkah 5. Hasilnya Tabel 4.4.

Tabel 4.4. Hasil perkalian $(X^k - \bar{X})$ dan S^{-1}

Sampel	A	B	C	D
1	0,50990	-0,39081	0,00429	0,43493
2	0,86534	1,05544	0,34601	-2,12147
3	-1,30680	-0,49978	1,40112	-1,15361
4	0,04008	-0,30268	0,65022	0,17422 ^a
5	-0,41342	0,35478	-1,09053	2,05807
6	-0,33656	1,23477	0,78195	1,39790
7	0,95487	-1,75100	-1,01732	0,79720
8	0,55867	-0,59477	-0,69985	0,18198
9	-0,22088	-0,87536	0,69022	0,82567
10	1,38596	0,45511	-2,05004	2,28259
11	0,34448	-0,29126	0,66729	0,56968
12	0,74506	-0,50985	0,02817	0,60159
13	-0,50758	0,70907	1,37286	-0,56637
14	1,49853	-0,62101	-1,38623	0,32460
15	0,65639	-0,00183	-0,98801	-0,05169
16	-3,63998	0,31505	0,24765	-1,30021
17	-0,51291	2,00797	0,52654	1,80803
18	0,32149	-1,20797	0,50705	0,20653
19	0,33312	0,13505	0,00584	-0,95516
20	-0,47826	-0,85989	-0,29519	1,15920
21	-0,35227	1,20044	1,07249	0,38124
22	-0,15461	0,63778	-0,02101	0,34371
23	-0,90403	-1,32354	1,51395	-2,52409
24	0,87180	0,28118	-0,06803	-1,05628
25	-0,02206	-0,32453	0,37440	1,02892
26	0,56347	0,38186	-0,17873	-3,90940
27	-0,43041	1,04251	-0,37650	-1,09162
28	-0,76564	0,41997	-2,07403	-1,91725
29	0,39624	-0,67669	0,05544	2,07110

Kedua, menghitung nilai T^2 untuk setiap sampel. Untuk sampel ke- i , cara menghitung T_i^2 adalah sebagai berikut.

1. Kalikan elemen ke-1 pada baris ke- i dari Tabel 4.3 dengan elemen ke-1 pada baris ke-1 yang bersesuaian dari Tabel 4.4. Begitu juga dengan elemen ke-2, ke-3, dan ke-4.
2. Jumlahkanlah keempat hasil perkalian pada Butir 1 di atas. Hasil penjumlahan adalah nilai T_i^2 .

Lakukanlah Butir 1 dan Butir 2 di atas untuk i dari 1 sampai dengan 29. Semua nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{29}^2$ disarikan pada Tabel 4.5, kolom kedua dan kelima.

Tabel 4.5. Nilai statistik T^2 dan UCL untuk setiap sampel

Sampel	T^2	UCL	Sampel	T^2	UCL
1	0,49036	12,94912	16	15,54289	12,94912
2	6,00183	12,94912	17	7,65543	12,94912
3	3,64017	12,94912	18	2,44457	12,94912
4	0,73668	12,94912	19	0,72188	12,94912
5	4,27672	12,94912	20	2,54296	12,94912
6	3,98688	12,94912	21	3,43308	12,94912
7	5,19741	12,94912	22	0,62123	12,94912
8	1,01647	12,94912	23	7,51902	12,94912
9	2,13112	12,94912	24	1,95901	12,94912
10	6,81014	12,94912	25	0,90892	12,94912
11	1,21055	12,94912	26	8,83017	12,94912
12	0,98201	12,94912	27	2,37449	12,94912
13	2,75886	12,94912	28	10,27838	12,94912
14	3,46789	12,94912	29	2,63312	12,94912
15	1,25573	12,94912			

Langkah 7: Menghitung batas atas UCL

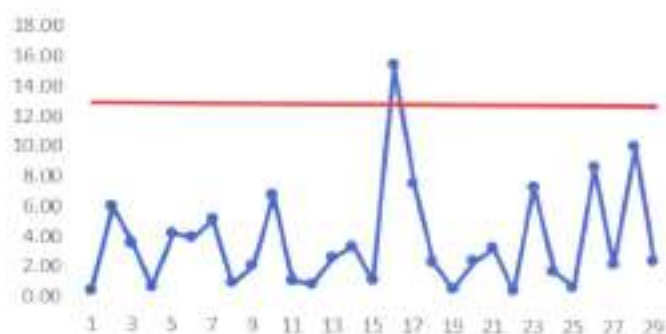
UCL adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $u = p/2$ dan $v = (m-p-1)/2$. Faktor kelipatannya adalah $\frac{(m-1)^2}{m}$. Jadi, untuk PFA = 0,0027, $u = 2$ dan $v = 12$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = "=BETA.INV(0.9973,2,12)*28^2/29" = 12,04012.$$

Hasil hitungan ini untuk setiap sampel ditampilkan pada Tabel 4.5 di atas, kolom ketiga dan keenam.

Langkah 8: Membuat diagram kontrol T^2

Diagram kontrol T^2 pada Tahap I seperti tampak pada Gambar 4.2 dibuat dengan memplot data T^2 dan UCL pada Tabel 4.5.



Gambar 4.2. Diagram kontrol T^2 pada Tahap I untuk Contoh 4.2

Seperti pada Gambar 4.1, pada gambar ini pun,

1. Sumbu vertikal adalah sumbu nilai statistik T^2 .
2. Sumbu horizontal menyatakan nomor urut sampel.
3. Titik-titik berwarna biru yang dihubungkan oleh garis lurus berwarna biru menampilkan nilai-nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{29}^2$.
4. Garis lurus berwarna merah menyatakan UCL.

Langkah 9: Mengidentifikasi HDS.

Pada Gambar 4.2 tampak bahwa sampel nomor 16 berada di luar daerah kontrol. Jadi, *HDS* terdiri atas 28 buah data yang diperoleh dari data awal dengan cara mengeluarkan data nomor 16. Untuk lebih memperjelas, *HDS* ini disajikan pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6. Historical Data Set (*HDS*)

Sampel	A	B	C	D
1	0,45167	-0,48367	0,13038	0,36566
2	1,76564	1,61521	0,62236	-0,90150
3	-1,03226	-1,01010	0,97998	-0,05790
4	0,21833	-0,44532	0,75436	0,35390
5	-1,32846	0,28052	-1,64496	1,19086
6	0,00363	1,60238	0,91875	1,01700
7	0,14644	-2,30695	-1,06554	0,39609
8	0,14768	-0,78730	-0,83135	0,17558
9	-0,32368	-1,29802	0,70700	0,70936
10	0,52731	0,80802	-2,02519	0,98518
11	0,57378	-0,35480	0,96330	0,50937
12	0,71903	-0,59063	0,28873	0,41837
13	0,20651	0,85614	1,44549	0,12560
14	1,00236	-0,62915	-1,28272	0,06480
15	0,30383	0,04373	-1,16604	0,02529
17	-0,22107	2,62015	0,55423	1,22109
18	0,29120	-1,63819	0,66175	0,31901
19	0,53039	0,19941	-0,04879	-0,29112
20	-1,19008	-1,38291	-0,72967	0,82338
21	0,25278	1,56225	1,21787	0,54533

22	-0,16619	0,78013	-0,19613	0,40779
23	-0,47098	-2,05207	1,18081	-0,77423
24	1,24232	0,52757	0,11804	-0,41695
25	-0,11704	-0,50137	0,42012	0,75751
26	1,18296	0,58191	-0,42187	-1,78375
27	-0,41761	1,25517	-0,91852	-0,28857
28	-1,74248	0,23277	-3,48722	-0,79368
29	0,04703	-0,90116	0,26781	1,18589
Rata-rata	0,09297	-0,05058	-0,09239	0,22462

Catatan:

Pada tabel HDS ini tidak ada baris bernomor 16; sampel nomor 16 dibuang.

Langkah 10: Penaksiran μ dan Σ

Karena diagram kontrol pada Gambar 4.2 menunjukkan adanya OOC pada sampel nomor 16, maka HDS terdiri atas semua sampel kecuali sampel nomor 16. Berdasarkan HDS , dengan cara yang sama seperti pada *Langkah 2* dan *Langkah 4*, kita peroleh nilai $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} ,

$$\bar{X}_{HDS} = \begin{pmatrix} 0,09297 \\ -0,05058 \\ -0,09239 \\ 0,22462 \end{pmatrix} \text{ dan } S_{HDS} = \begin{pmatrix} 0,61791 & 0,17944 & 0,26254 & -0,15790 \\ 0,17944 & 1,42935 & 0,02251 & -0,00005 \\ 0,26254 & 0,02251 & 1,31180 & -0,21736 \\ -0,15790 & -0,00005 & -0,21736 & 0,50737 \end{pmatrix}$$

Komponen-komponen vektor $\bar{X}_{HDS}$ dapat dilihat juga pada Tabel 4.6, baris terakhir (baris Rata-rata). Nilai $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} inilah yang digunakan di Tahap II sebagai nilai taksiran untuk μ dan Σ .

Tahap II

Karena μ dan Σ tidak diketahui, nilai kedua parameter ini disubstitusi oleh nilai $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang diperoleh di akhir Tahap I. Setelah itu, dibuatlah diagram kontrol T^2 pada Tahap II dengan cara sebagai berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data yang berupa vektor data berdimensi p . Sekali lagi, vektor data itu berbentuk sebagai berikut,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

dengan x_j adalah data tentang variabel ke- j ; $j = 1, 2, \dots, p$.

Langkah 2: Pusatkan data yang dikumpulkan pada *Langkah 1* terhadap $\bar{X}_{HDS}$. Artinya, hitung $(X - \bar{X}_{HDS})$.

Langkah 3: Hitung S_{HDS}^{-1} matriks inversi dari S_{HDS} .

Langkah 4: Hitung $T^2 = (X - \bar{X}_{HDS})^t S_{HDS}^{-1} (X - \bar{X}_{HDS})$.

Langkah 5: Hitung $UCL = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{\alpha,p,(m-p)}$ seperti yang dikemukakan Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019) dan Tracy dkk. (1992). Di sini, $F_{\alpha,p,(m-p)}$ adalah kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan p dan $(m - p)$.

Langkah 6: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai T^2 yang diperoleh pada *Langkah 4*, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 7: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika T^2 berada di luar daerah kontrol, maka perlu diselidiki apakah terjadi sinyal/alarm yang berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC (*out-of-control*) diikuti dengan upaya peningkatan kualitas proses.

Contoh 4.3.

Sebagai contoh yang dapat menggambarkan bagaimana pengontrolan dilakukan, di sini digunakan data hipotetikal untuk 15 kali pengontrolan berturut-turut. Pelaksanaan pengontrolan di Tahap II didasarkan kepada nilai $\bar{R}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang telah kita peroleh di akhir Tahap I. Berikut adalah implementasi langkah-langkahnya.

Langkah 1: Pengumpulan data saat pengontrolan

Data yang terkumpul pada pengontrolan pertama terpampang pada baris pertama Tabel 4.7. Data pada pengontrolan kedua, ketiga, ..., kelimabelas tertera pada baris kedua, ketiga, ..., kelimabelas.

Tabel 4.7. Data yang terkumpul saat pengontrolan

Obs	A	B	C	D
1	0,28969	0,59794	2,21627	0,72748
2	-1,25164	-1,33645	-0,56120	1,40864
3	1,02797	1,91989	0,11519	0,62115
4	-0,67600	-0,89292	0,50111	0,89990
5	0,15596	0,84330	-0,10180	1,17423
6	0,67706	-0,11096	-0,29671	0,74332
7	-1,66665	-0,54675	-1,28919	0,61098
8	-1,54587	0,40023	-1,16967	-0,35293
9	-1,14178	2,11793	-0,34975	0,17380
10	-0,97664	-0,42489	-0,68565	-1,36619
11	-0,90715	-0,29216	-0,74857	-0,14985
12	-0,26132	-0,18678	0,02314	-4,00934
13	-0,28092	1,43427	-1,56433	0,84976
14	0,16138	-0,09673	-0,30191	0,46126
15	-1,64852	0,15728	1,15092	-0,26171

Langkah 2: Memusatkan data

Data pada Tabel 4.7 dipusatkan terhadap $\bar{X}_{HDS}$ yang diperoleh pada langkah terakhir Tahap I. Hasilnya disajikan pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8. Data terpusat Tahap II

Obs	A	B	C	D
1	0,19672	0,64852	2,30867	0,50286
2	-1,34461	-1,28587	-0,46880	1,18402
3	0,93500	1,97047	0,20759	0,39653
4	-0,76897	-0,84234	0,59351	0,67528
5	0,06299	0,89388	-0,00941	0,94961
6	0,58410	-0,06038	-0,20432	0,51870
7	-1,75961	-0,49617	-1,19679	0,38636
8	-1,63884	0,45081	-1,07727	-0,57755
9	-1,23474	2,16851	-0,25736	-0,05082
10	-1,06961	-0,37431	-0,59325	-1,59081
11	-1,00011	-0,24158	-0,65618	-0,37447
12	-0,35428	-0,13620	0,11554	-4,23396
13	-0,37389	1,48486	-1,47194	0,62514
14	0,06842	-0,04615	-0,20952	0,23664
15	-1,74148	0,20786	1,24332	-0,48633

Langkah 3: Menghitung matriks inversi dari S_{HDS}

Matriks S_{HDS} yang diberikan pada langkah terakhir Tahap I memiliki inversi S_{HDS}^{-1} berikut.

$$S_{HDS}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,93813 & -0,23849 & -0,30555 & 0,47224 \\ -0,23849 & 0,72917 & 0,02468 & -0,06357 \\ -0,30555 & 0,02468 & 0,86897 & 0,27719 \\ 0,47224 & -0,06357 & 0,27719 & 2,23667 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Menghitung T^2

Sekali lagi, cara menghitung T^2 kita bagi dalam dua bagian. *Pertama*, menghitung hasil kali antara vektor $(X - \bar{X}_{HDS})^t$ dan matriks S_{HDS}^{-1} . Di sini pun kita gunakan nilai $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang diberikan pada langkah terakhir Tahap I. Hasilnya disajikan pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9. Hasil perkalian $(X - \bar{X}_{HDS})^t$ dan S_{HDS}^{-1}

Obs	A	B	C	D
1	-0,44235	0,48083	1,80571	0,57192
2	-1,39696	-0,72132	-0,18164	1,92716
3	1,62382	1,17897	-0,26711	1,32866
4	-1,16287	-0,45339	0,64054	0,86912
5	0,58647	0,55592	-0,26043	2,09482
6	1,68449	-0,34440	-0,58749	1,63815
7	-2,69350	-0,00313	-0,37207	-0,01874

8	-3,42459	0,74550	-0,01584	-2,20155
9	-3,01792	1,88900	0,44224	-1,10816
10	-2,98222	0,10621	0,39155	-4,12457
11	-1,97582	0,07938	-0,02477	-1,34909
12	-3,77072	0,35533	1,42411	-9,74049
13	-0,03536	1,06250	-1,21834	1,41121
14	0,41658	-0,08015	-0,28030	0,63976
15	-4,55970	0,68609	2,01090	-2,69108

Kedua, menghitung nilai T^2 untuk setiap sampel. Untuk sampel ke- i , cara menghitung T_i^2 adalah sebagai berikut.

1. Kalikan elemen ke-1 pada baris ke- i dari Tabel 4.8 dengan elemen ke-1 pada baris ke- i dari Tabel 4.9. Lakukan hal yang sama untuk elemen ke-2, ke-3, dan ke-4.
2. Jumlahkanlah keempat hasil perkalian di atas. Hasil penjumlahannya adalah nilai T_i^2 .

Lakukanlah Butir 1 dan Butir 2 di atas untuk i dari 1 sampai dengan 15. Semua nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{15}^2$ disarikan pada Tabel 4.10, kolom kedua.

Tabel 4.10. Nilai statistik T^2 dan UCL untuk setiap sampel

Sampel	T^2	UCL
1	4,68119	25,70845
2	5,17285	25,70845
3	4,31282	25,70845
4	2,24318	25,70845
5	2,52559	25,70845
6	1,96840	25,70845
7	5,17912	25,70845
8	7,23699	25,70845
9	7,76517	25,70845
10	9,47916	25,70845
11	2,47830	25,70845
12	42,69293	25,70845
13	4,26641	25,70845
14	0,24232	25,70845
15	11,89220	25,70845

Langkah 5: Menghitung UCL

UCL adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan $p = 4$ dan $(m - p) = 28 - 4 = 24$. Faktor kelipatannya sebesar $\frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} = 4,66071$. Di sini, $m = 28$ adalah banyaknya data dalam *HDS*. Jadi, untuk $PFA = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = "-4.66071 * F.INV(0.9973, 4, 24)" = 25,70845.$$

Hasil hitungan ini disajikan pada Tabel 4.10, kolom ketiga.

Langkah 6: Membuat diagram kontrol T^2

Gambar 4.3 memamerkan diagram kontrol T^2 yang kita peroleh dengan memplot nilai T_1^2 , T_2^2 , ..., T_{15}^2 dan nilai UCL pada Tabel 4.10 dalam satu diagram.



Gambar 4.3. Diagram kontrol T^2 pada Tahap II selama 15 kali untuk Contoh 4.3

Langkah 7: Apakah proses berjalan aman?

Diagram kontrol ini menunjukkan bahwa pada saat pengontrolan pertama sampai dengan kesebelas proses berjalan dengan aman. Akan tetapi pada pengontrolan duabelas, diagram memberikan sinyal OOC. Apabila ternyata sinyal ini berupa sinyal palsu, proses dilanjutkan dengan pengontrolan ketigabelas. Namun apabila berupa sinyal tulen, lakukanlah perbaikan proses. Setelah itu, proses dijalankan kembali.

Gambar di atas menunjukkan bahwa pada pengontrolan ketigabelas, keempatbelas dan kelimabelas, proses berjalan dalam keadaan aman.

BAB 5

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP

BERUKURAN KONSTAN: STATISTIK T^2

Apabila teknik pengendalian target proses pada Bab 4 didasarkan kepada observasi individual, maka pada bab ini lain lagi. Teknik pengendalian pada Bab 5 ini dilakukan dengan mengobservasi sub-grup (*sample*) berukuran n di mana $n > p$. Dengan kata lain, data dari setiap sub-grup berbentuk matriks berukuran $(n \times p)$ yang terdiri atas n baris dan p kolom seperti ini,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Di sini x_{ij} adalah data tentang variabel ke- j pada unit sampel ke- i ; i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Seperti untuk skenario sampling pertama yang berbasis observasi individual, statistik pengontrol yang digunakan untuk skenario sampling yang kedua ini, juga didasarkan kepada formula (4.1) bila μ dan Σ diketahui. Dalam hal μ dan Σ tidak diketahui, kedua parameter ini ditaksir terlebih dahulu pada Tahap I berdasarkan m buah sampel yang saling bebas. Sekali lagi disarankan m antara 20 dan 30. Prosedur pengendalian baik pada kasus di mana μ dan Σ diketahui maupun kasus di mana μ dan Σ tidak diketahui, akan dijelaskan satu per satu di bawah ini.

1. Bila μ dan Σ Diketahui

Dalam kasus di mana μ dan Σ diketahui, Tahap I tidak diperlukan. Kita langsung saja ke Tahap II.

Tahap II

Langkah-langkah pembuatan diagram kontrol T^2 pada Tahap II berdasarkan observasi sub-grup adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengendalian dimulai dengan mengumpulkan data sub-grup yang berukuran n . Data yang terkumpul berbentuk matriks berukuran $(n \times p)$; artinya terdiri atas n baris dan p kolom,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

di mana x_{ij} adalah data tentang variabel ke- j pada unit sampel ke- i ; i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

di mana $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data variabel ke- j ; $j = 1, 2, \dots, p$.

Langkah 3: Pusatkan data rata-rata terhadap μ ; hitung $(\bar{X} - \mu)$.

Langkah 4: Hitung $T^2 = n(\bar{X} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$.

Langkah 5: Hitung $UCL = \chi^2_{\alpha, p}$ dengan $\alpha = 0,0027$ untuk proses industri manufaktur dan 0,05 untuk industri jasa.

Langkah 6: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai T^2 yang diperoleh pada *Langkah 4* bersama dengan nilai UCL .

Langkah 7: Jika diagram kontrol menunjukkan keadaan terkontrol, artinya $T^2 < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika T^2 berada di luar daerah kontrol, maka perlu diselidiki apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC diikuti dengan upaya mengawal proses pada jalur yang benar.

Contoh 5.1.

Contoh ini mengemukakan teknik mengontrol target proses produksi tepung Kakao di sebuah pabrik makanan berbahan baku kakao. Kualitas tepung ditentukan oleh tiga CTQ yakni (1) pH, (2) kandungan lemak (%), dan (3) kandungan jamur (%). Ketiga CTQ tersebut memiliki vektor mean μ dan matriks kovariansi Σ berikut ini,

$$\mu = \begin{pmatrix} 6,949 \\ 9,755 \\ 2,658 \end{pmatrix} \text{ dan } \Sigma = \begin{pmatrix} 0,004 & -0,003 & 0,005 \\ -0,003 & 0,049 & -0,012 \\ 0,005 & -0,012 & 0,042 \end{pmatrix}.$$

dan dapat dianggap berdistribusi normal multivariat. Adapun inversi dari matriks Σ adalah,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 312,460 & 9,186 & -32,136 \\ 9,186 & 22,291 & 5,247 \\ -32,136 & 5,247 & 28,875 \end{pmatrix}.$$

Langkah 1: Pengumpulan data

Pengontrolan kualitas proses produksi dilakukan secara regular di mana pada setiap saat pengontrolan diambil sub-grup berukuran $n = 6$. Data pada pengontrolan pertama ada pada Tabel 5.1. Rata-ratanya untuk setiap CTQ ditampilkan pada baris terakhir.

Tabel 5.1. Data sub-grup pada pengontrolan pertama

Obs	pH	Lemak	Jamur
1	6,990	9,759	3,066
2	6,864	9,630	2,757
3	6,868	9,551	2,889
4	6,860	9,700	2,496
5	6,880	9,828	2,397
6	6,860	10,255	2,496
Rata-rata	6,887	9,787	2,684

Data pada pengontrolan berikutnya sama seperti pada tabel di atas. Namun, di dalam buku ini hanya akan ditampilkan rata-ratanya saja pada Tabel 5.2.

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata

Kinerja proses produksi selama 16 kali pengontrolan akan dilaporkan berikut ini. Di setiap pengontrolan dilakukan observasi terhadap sub-grup berukuran $n = 6$. Lalu, pada setiap sub-grup dihitung rata-rata untuk setiap CTQ. Hasilnya disajikan pada Tabel 5.2.

Tabel 5.2. Rata-rata sub-grup

Sub-grup	pH	Lemak	Jamur
1	6,887	9,787	2,684
2	6,986	9,604	2,491
3	6,979	9,811	2,608
4	6,897	9,664	2,617
5	6,918	9,839	2,393
6	6,915	9,961	2,488
7	6,940	9,737	2,601
8	6,936	9,491	2,838
9	7,055	9,843	2,735
10	6,880	9,804	2,603
11	6,975	9,587	2,736
12	6,946	9,934	2,620
13	7,027	9,781	2,851
14	6,912	10,141	2,670
15	6,942	9,639	2,889
16	6,991	9,759	2,947

Langkah 3: Memusatkan data rata-rata terhadap μ ; menghitung $(\bar{X} - \mu)$

Data rata-rata setiap sub-grup dipusatkan terhadap vektor mean populasi μ . Tabel 5.3 memperlihatkan data hasil pemusatan.

Tabel 5.3. Rata-rata sub-grup yang terpusat

Sub-grup	pH	Lemak	Jamur
1	-0,062	0,032	0,025
2	0,037	-0,151	-0,167
3	0,030	0,056	-0,050
4	-0,052	-0,091	-0,042
5	-0,031	0,084	-0,266
6	-0,035	0,206	-0,170
7	-0,010	-0,018	-0,057
8	-0,013	-0,264	0,179
9	0,106	0,088	0,076
10	-0,069	0,049	-0,055
11	0,026	-0,168	0,077
12	-0,003	0,179	-0,038
13	0,077	0,026	0,193
14	-0,038	0,386	0,011
15	-0,007	-0,116	0,231
16	0,042	0,004	0,289

Langkah 4: Menghitung T^2

Sekali lagi, cara menghitung nilai statistik $T^2 = n(\bar{X} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$ untuk setiap sub-grup sangat mudah. *Pertama*, kita hitung vektor A yaitu perkalian matriks antara $(\bar{X} - \mu)^t$ dan Σ^{-1} . Hasilnya tertera pada Tabel 5.4 kolom kedua sampai dengan keempat. Cara mendapatkannya mudah sekali; kalikan saja (perkalian matriks) setiap baris pada Tabel 5.3 dengan matriks Σ^{-1} . *Kedua*, nilai T^2 dihitung sebagai perkalian matriks antara vektor A dan vektor $n(\bar{X} - \mu)$. Nilai T^2 yang diperoleh ada di kolom kelima Tabel 5.4 tersebut. Caranya juga mudah. Sebagai contoh, nilai T^2 untuk sub-grup 1 diperoleh dengan cara,

1. (pH pada baris 1 kolom 2 Tabel 5.3) * (pH pada baris 1 kolom 2 Tabel 5.4) = $-0,06226 * -19,97131 = 1,24341$.
2. (Lemak pada baris 1 kolom 3 Tabel 5.3) * (Lemak pada baris 1 kolom 3 Tabel 5.4) = $0,03203 * 0,27450 = 0,00879$.
3. (Jamur pada baris 1 kolom 4 Tabel 5.3) * (Jamur pada baris 1 kolom 4 Tabel 5.4) = $0,02526 * 2,89821 = 0,07321$.
4. Hasil yang diberikan ketiga butir di atas dijumlahkan = $1,32541$
5. Nilai $T^2 = 6$ dikalikan dengan hasil pada butir 4 = $6 * 1,32541 = 7,95249$ (baris 1 kolom 5 Tabel 5.4).

Hasil perhitungan selengkapnya untuk semua sub-grup disajikan pada Tabel 5.4.

Tabel 5.4. Nilai T^2 dan UCL untuk setiap sub-grup

Sub-grup	A			T^2	UCL
	pH	Lemak	Jamur		
1	-19,971	0,274	2,898	7,952	14,156
2	15,515	-3,915	-6,810	13,827	14,156
3	11,481	1,263	-2,122	3,128	14,156
4	-15,775	-2,721	-0,003	6,414	14,156
5	-0,466	0,181	-6,226	10,098	14,156
6	-3,497	3,368	-2,725	7,669	14,156
7	-1,337	-0,795	-1,431	0,653	14,156
8	-12,336	-5,068	4,221	13,558	14,156
9	31,391	3,331	-0,730	21,336	14,156
10	-19,376	0,166	0,891	7,787	14,156
11	4,017	-3,102	0,522	3,989	14,156
12	1,862	3,763	-0,064	4,024	14,156
13	18,232	2,291	3,208	12,525	14,156
14	-8,613	8,321	3,565	21,473	14,156
15	-10,697	-1,440	6,283	10,156	14,156
16	3,838	1,984	7,020	13,186	14,156

Langkah 5: Menghitung UCL

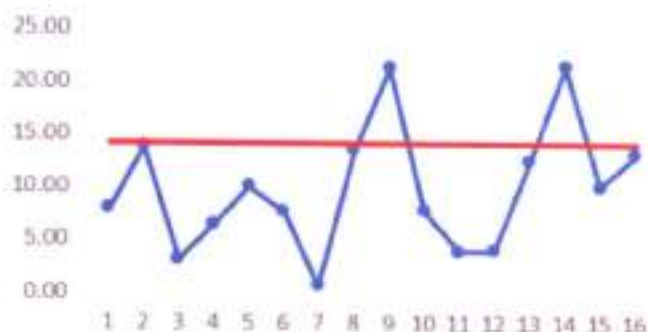
Untuk $\alpha = 0,0027$, UCL adalah kuantil ke-99,73% dari distribusi Chi-Squared dengan derajat kebebasan $p = 3$ atau $\chi^2_{0,0027;3}$. Dengan menggunakan MS Excel, UCL diberikan oleh,

$$UCL = "=CHIINV(0.0027, 3)" = 14,156$$

Pada Tabel 5.4, nilai UCL untuk setiap kelas diberikan di kolom terakhir.

Langkah 6: Membuat diagram kontrol T^2

Untuk menggambarkan diagram kontrol T^2 , data pada Tabel 5.4 kolom kelima dan terakhir kita plot dalam satu diagram. Maka kita peroleh diagram kontrol T^2 seperti tampak pada Gambar 5.1.

Gambar 5.1. Diagram kontrol T^2 Tahap II untuk Contoh 5.1

Langkah 7: Proses aman?

Hingga pengontrolan kedelapan, proses berjalan aman; target proses (*sample mean*) sesuai dengan target populasi (*population mean*). Namun, pada pengontrolan berikutnya, diagram kontrol memberi sinyal/alarm bahwa pada saat itu proses berada dalam keadaan OOC. Nah, pada saat itu juga dilakukan penyelidikan tentang apa yang telah terjadi. Setelah diberi tindakan seperlunya, proses kembali berjalan seperti yang diinginkan. Akan tetapi pada lima pengontrolan berikutnya terjadi lagi OOC. Kembali, pengelola kualitas harus melakukan tindakan yang diperlukan.

Catatan:

Contoh di atas memperlihatkan begitu pentingnya peran diagram kontrol T^2 dalam teknik dan manajemen industri, yakni dalam mengawal agar target proses dicapai secara signifikan. Perlu dicatat bahwa, di industri manufaktur,

1. Kegiatan pengumpulan data umumnya sangat mahal. Oleh karena itu, pengontrolan proses menuntut n yang tidak besar bahkan kerap kecil.
2. Nilai n dapat dikontrol oleh pengelola kualitas (*Quality Management*). Oleh karena itu, n dapat diambil konstan untuk setiap sub-grup.

Hal yang sebaliknya biasa terjadi di industri jasa.

2. Bila μ dan Σ Tidak Diketahui

Bagaimana jika μ dan Σ tidak diketahui? Dalam hal ini, pengontrolan dimulai dengan Tahap I yakni tahap penaksiran nilai μ dan Σ . Kemudian dilanjutkan dengan Tahap II.

Tahap I

Langkah-langkah penaksiran kedua parameter μ dan Σ adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup yang saling bebas, masing-masing berukuran n . Data yang terkumpul berupa m buah matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 & \cdots & x_{1p}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 & \cdots & x_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^1 & x_{n2}^1 & \cdots & x_{np}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 & \cdots & x_{1p}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & \cdots & x_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^2 & x_{n2}^2 & \cdots & x_{np}^2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{11}^m & x_{12}^m & \cdots & x_{1p}^m \\ x_{21}^m & x_{22}^m & \cdots & x_{2p}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^m & x_{n2}^m & \cdots & x_{np}^m \end{pmatrix},$$

di mana x_{ij}^k adalah data variabel ke- j pada unit sampel ke- i untuk sub-grup ke- k .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari setiap sub-grup. Vektor rata-rata sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^k \\ \bar{x}_2^k \\ \vdots \\ \bar{x}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{x}_i^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Hitung rata-rata total dari keseluruhan m buah sub-grup tersebut (*grand mean*), yakni

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{X}^k.$$

Langkah 4: Pusatkan rata-rata sub-grup terhadap rata-rata total (*grand mean*) dengan menghitung $(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}})$ untuk setiap k dari 1, 2, ..., m .

Langkah 5: Hitung matriks kovariansi untuk setiap sub-grup. Pada sub-grup ke- k , matriks kovariansi adalah,

$$S^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t,$$

di mana $X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix}$ adalah vektor baris ke- i dari matriks data sub-grup ke- k .

Langkah 6: Hitung $\bar{S}$ rata-rata dari semua matriks kovariansi sampel,

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^k.$$

Langkah 7: Hitung $\bar{S}^{-1}$ inversi dari matriks $\bar{S}$

Langkah 8: Untuk sub-grup ke- k , k bergerak dari 1, 2, ..., m , hitung nilai statistik $T_k^2 = (n-1)(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}})^t \bar{S}^{-1}(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}})$.

Langkah 9: Hitung $UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)} F_{\alpha; p, m(n-1)-(p-1)}$ yakni kuantil ke- $(1-\alpha)$ dari distribusi F dengan derajat kebebasan p dan $m(n-1)-(p-1)$ dikalikan dengan $\frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)}$. Penjelasan yang rinci dapat dilihat di Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019).

Langkah 10: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai statistik $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ dan nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 11: Bila di antara statistik $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ ada yang di luar daerah kontrol, hitung $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$ yakni rata-rata total (*grand mean*) dan rata-rata semua matriks kovariansi dalam HDS . Lalu, kita terus ke Tahap II dengan menggunakan $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$ sebagai pengganti μ dan Σ . Bila semua nilai statistik itu berada di dalam daerah kontrol, kita langsung ke Tahap II dengan menggunakan nilai $\bar{\bar{X}}$ dan $\bar{S}$ pada Langkah 3 dan Langkah 5 sebagai $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$.

Contoh 5.2.

Contoh berikut menggambarkan bagaimana praktik pengontrolan akhir mingguan perilaku bursa efek New York (*New York Stock Exchange* disingkat NYSE).

Dalam artikel kami, Kazemilari dan Djauhari (2015), yang berjudul "*Correlation network analysis for multi-dimensional data in stocks market*" dan terbit di *Physica A*, Volume 429, halaman 62-75, telah dikemukakan bahwa pada periode dari kuartal ke-3 tahun 2005 sampai dengan kuartal ke-2 tahun 2006 ketiga saham GE, UTX dan CAT memiliki posisi penting dalam studi perilaku bursa NYSE. Untuk keterangan lebih rinci tentang bursa di NYSE, silahkan rujuk artikel kami tersebut di atas. Sebagai catatan, *Physica A* adalah jurnal yang paling bergengsi dalam bidang *Econophysics*, terbitan Elsevier.

Pengontrolan terhadap ketiga saham tersebut dilakukan setiap akhir minggu selama satu tahun dari 19 Juli 2005 sampai dengan 21 Juli 2006, atau 51 minggu. Tujuannya untuk mengetahui apakah pada minggu yang sedang berjalan terjadi gejala pasar bursa yang signifikan atau tidak. Data yang digunakan adalah data harga saham harian berdasarkan harga penutupan (*daily closed price*). Setiap minggu terdiri atas 5 hari kerja.

Langkah 1: Pengumpulan data

Tahap 1 adalah menentukan *HDS* untuk menaksir μ dan Σ yang didahului dengan pengumpulan m buah sub-grup yang saling bebas. Di sini, pengertian sub-grup adalah periode pasar bursa selama satu minggu. Jadi, ukuran sub-grup adalah $n = 5$ (5 hari kerja/minggu). banyaknya CTQ $p = 3$ (banyaknya saham yang dipelajari). Untuk tujuan di atas, digunakan $m = 30$, yakni data 30 minggu pertama dari 51 minggu. Lalu, pengontrolan dilakukan untuk keduapuluh satu minggu sisanya.

Seperti biasa, dalam studi tentang pasar saham, data yang digunakan adalah data *log-return* (x_t) bukan data harga saham (p_t) yakni,

$$x_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right).$$

Di sini, p_t adalah harga saham pada penutupan hari ke- t . Jadi, terkumpul 51 tabel data berukuran 5 baris dan 3 kolom. Sebagai gambaran, pada Tabel 5.5 ditampilkan data *log-return* untuk dua minggu pertama disertai rata-ratanya pada baris terakhir.

Tabel 5.5. Data *log-return* dua minggu pertama

Minggu Pertama				Minggu Kedua			
Hari	GE	UTX	CAT	Hari	GE	UTX	CAT
1	0,00369	0,00930	0,04952	1	-0,00202	-0,00179	-0,00058
2	-0,00085	0,00173	-0,00375	2	0,00288	0,00890	0,01855
3	-0,00853	-0,00270	-0,01706	3	0,00230	0,01057	0,03096
4	0,00200	-0,01282	0,00210	4	-0,01095	-0,01274	-0,00997
5	-0,00859	-0,01358	-0,01074	5	-0,00727	-0,01350	0,00204
Rata-rata	-0,00246	-0,00361	0,00401	Rata-rata	-0,00301	-0,00171	0,00820

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata dari setiap sub-grup

Rata-rata *log-return* dari setiap sub-grup (minggu) selama 30 minggu pertama disajikan pada Tabel 5.6.

Tabel 5.6. Rata-rata *log-return* untuk menaksir μ dan Σ

Minggu	GE	UTX	CAT	Minggu	GE	UTX	CAT
1	-0,00246	-0,00361	0,00401	16	0,00095	0,00246	0,00572
2	-0,00301	-0,00171	0,00820	17	0,00376	0,00717	0,00599
3	-0,00288	-0,00270	-0,00126	18	0,00943	0,00356	0,00998
4	0,00265	0,00950	0,00580	19	-0,00189	-0,00196	-0,00336
5	-0,00141	0,00046	-0,00164	20	-0,00084	0,00353	0,00000
6	-0,00219	-0,00591	-0,00409	21	0,00112	0,00819	0,00333
7	0,00201	0,00264	0,01716	22	-0,00253	0,00101	-0,00577
8	0,00199	0,00191	0,00302	23	-0,00074	-0,00369	0,00368
9	-0,00258	-0,00203	-0,00892	24	0,00159	-0,00060	0,00779
10	-0,00119	0,00369	0,00661	25	-0,00210	-0,00179	0,00613
11	-0,00475	-0,00594	-0,00323	26	-0,01059	-0,00432	-0,00418
12	0,00570	-0,00207	-0,00784	27	-0,00217	0,01380	0,01866
13	0,00118	0,00016	-0,00584	28	-0,00110	-0,00440	0,00498
14	-0,00053	0,00506	-0,01409	29	0,00303	0,00087	-0,00023
15	-0,00184	-0,00129	0,00944	30	0,00066	0,00513	0,01125

Langkah 3: Menghitung vektor rata-rata total (*grand mean*) $\bar{\bar{X}}$

Vektor $\bar{\bar{X}}$ adalah vektor rata-rata dari rata-rata *log-return* pada Tabel 5.6.

$$\bar{\bar{X}} = \begin{pmatrix} -0,00036 \\ 0,00090 \\ 0,00238 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Memusatkan data

Memusatkan rata-rata sub-grup terhadap rata-rata total (*grand mean*) dengan menghitung $(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}})$ untuk setiap k dari 1, 2, ..., m . Caranya? Setiap baris pada Tabel 5.6 dikurangi dengan nilai $\bar{\bar{X}}$. Hasil pemusatan disajikan pada Tabel 5.7.

Tabel 5.7. Rata-rata terpusat

Minggu	GE	UTX	CAT	Minggu	GE	UTX	CAT
1	-0,00210	-0,00452	0,00164	16	0,00131	0,00156	0,00334
2	-0,00266	-0,00262	0,00582	17	0,00411	0,00626	0,00362
3	-0,00252	-0,00360	-0,00364	18	0,00978	0,00266	0,00760
4	0,00301	0,00859	0,00342	19	-0,00154	-0,00286	-0,00574
5	-0,00105	-0,00044	-0,00401	20	-0,00048	0,00263	-0,00238
6	-0,00183	-0,00681	-0,00647	21	0,00148	0,00728	0,00095
7	0,00237	0,00174	0,01478	22	-0,00217	0,00011	-0,00814
8	0,00235	0,00101	0,00064	23	-0,00038	-0,00460	0,00130
9	-0,00223	-0,00293	-0,01129	24	0,00194	-0,00151	0,00542
10	-0,00083	0,00279	0,00424	25	-0,00174	-0,00269	0,00375
11	-0,00439	-0,00684	-0,00560	26	-0,01023	-0,00523	-0,00656
12	0,00606	-0,00298	-0,01021	27	-0,00182	0,01289	0,01629
13	0,00154	-0,00074	-0,00822	28	-0,00074	-0,00530	0,00260
14	-0,00017	0,00416	-0,01646	29	0,00339	-0,00003	-0,00261
15	-0,00148	-0,00220	0,00706	30	0,00102	0,00423	0,00887

Langkah 5: Menghitung matriks kovariansi untuk setiap sub-grup

Matriks kovariansi untuk dua minggu pertama S^1 dan S^2 , sesuai dengan data pada Tabel 5.6 adalah,

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0,00003 & 0,00003 & 0,00012 \\ 0,00003 & 0,00010 & 0,00017 \\ 0,00012 & 0,00017 & 0,00070 \end{pmatrix} \text{ dan } S^2 = \begin{pmatrix} 0,00004 & 0,00007 & 0,00009 \\ 0,00007 & 0,00013 & 0,00017 \\ 0,00009 & 0,00017 & 0,00027 \end{pmatrix}.$$

Keduapuluh delapan matriks kovariansi lainnya $S^3, S^4, \dots, S^{30}$, diperoleh dengan cara yang sama.

Langkah 6: Menghitung rata-rata dari semua matriks kovariansi sampel

Rata-rata dari ketigapuluh matriks kovariansi tersebut di atas adalah

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{30} S^k \\ &= \begin{pmatrix} 0,00008 & 0,00003 & 0,00006 \\ 0,00003 & 0,00010 & 0,00009 \\ 0,00006 & 0,00009 & 0,00031 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Langkah 7: Menghitung $\bar{S}^{-1}$.

Hasil komputasi memberikan matriks inversi dari $\bar{S}$ adalah,

$$\bar{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 15702,23976 & -3715,10474 & -1764,17200 \\ -3715,10474 & 15089,76751 & -3813,55334 \\ -1764,17200 & -3813,55334 & 4721,36194 \end{pmatrix}.$$

Langkah 8: Menghitung nilai statistik T_k^2

Untuk minggu ke- k , kita hitung nilai statistik $T_k^2 = (n-1)(\bar{X}^k - \bar{X})^t \bar{S}^{-1}(\bar{X}^k - \bar{X})$; $k = 1, 2, \dots, m = 30$, dalam dua bagian seperti pada Contoh 5.1 di atas dalam kasus di mana μ dan Σ diketahui. *Pertama*, kita hitung vektor A yang sama dengan perkalian matriks antara $(\bar{X}^k - \bar{X})^t$ dan $\bar{S}^{-1}$. Hasilnya tertera pada Tabel 5.7 kolom kedua sampai dengan keempat. Cara mendapatkannya mudah sekali; sama seperti mendapatkan Tabel 5.4. *Kedua*, nilai T_k^2 dihitung sebagai perkalian matriks antara vektor A dan vektor $(n-1)(\bar{X}^k - \bar{X})$. Nilai T_k^2 yang diperoleh ada di kolom kelima Tabel 5.7 tersebut. Caranya juga mudah; sama seperti pada Contoh 5.1 sebelumnya.

Tabel 5.7. Nilai T^2 dan UCL untuk setiap sub-grup

Minggu	A			T_k^2	UCL
	GE	UTX	CAT		
1	-19,07983	-66,61657	28,66060	1,55183	14,72018
2	-42,25546	-51,81385	42,15360	1,97289	14,72018
3	-19,83414	-31,08122	1,00126	0,63337	14,72018
4	9,23669	105,44249	-21,90467	3,43540	14,72018
5	-7,77350	12,55137	-15,40984	0,25784	14,72018
6	7,94881	-71,32453	-1,32862	1,91976	14,72018
7	4,70260	-38,92917	58,96502	3,25979	14,72018

8	32,04817	4,01399	-4,95682	0,30488	14,72018
9	-4,13063	7,08021	-38,20835	1,67971	14,72018
10	-30,82454	28,97654	10,83374	0,60870	14,72018
11	-33,69971	-65,56012	7,38915	2,22131	14,72018
12	124,22816	-28,48723	-47,55573	5,29308	14,72018
13	41,41439	14,41477	-38,69107	1,48419	14,72018
14	10,89992	126,14883	-93,28133	8,23312	14,72018
15	-27,51774	-54,57674	44,32192	1,89408	14,72018
16	8,85690	5,86893	7,54906	0,18387	14,72018
17	34,95247	65,43297	-14,07165	2,01084	14,72018
18	130,33188	-25,21648	8,49442	5,09050	14,72018
19	-3,36631	-15,60280	-13,47376	0,50878	14,72018
20	-13,17545	50,55845	-20,40131	0,75148	14,72018
21	-5,51225	100,78113	-25,88841	2,80499	14,72018
22	-20,17670	40,78669	-35,03423	1,33464	14,72018
23	8,82205	-72,93751	24,35560	1,45494	14,72018
24	26,55933	-50,63381	27,89403	1,11619	14,72018
25	-23,92046	-48,46327	31,03402	1,15369	14,72018
26	-129,65934	-15,83966	7,00961	5,45333	14,72018
27	-105,15198	139,18262	30,93016	9,95642	14,72018
28	3,51826	-87,23090	33,82789	2,19284	14,72018
29	57,91982	-3,08865	-18,18529	0,97522	14,72018
30	-15,36139	26,16354	23,97100	1,23042	14,72018

Langkah 9: Menghitung UCL

UCL untuk setiap sub-grup adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan $p = 3$ dan $m(n - 1) - (p - 1) = 30 \cdot 4 - 2 = 118$. Faktor kelipatannya sebesar $K = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)} = \frac{3 \cdot 29 \cdot 4}{30 \cdot 4 - 2} = 2,94915$. Jadi, untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = "-K * F.INV(0.0027, 3, 118)" = 14,72018.$$

Hasil komputasi UCL disajikan pada Tabel 5.7 kolom terakhir.

Langkah 10: Membuat diagram kontrol T^2

Diagram kontrol T^2 kita buat dengan memplot nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{30}^2$ dan nilai UCL pada Tabel 5.7 pada diagram yang sama. Hasilnya dapat dilihat pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2. Diagram control T^2 pada Tahap I untuk Contoh 5.2

Langkah 11: Proses aman?

Diagram kontrol pada Gambar 5.2 memperlihatkan bahwa nilai T^2 dari minggu pertama hingga minggu ketigapuluh selalu lebih kecil dari UCL. Ini berarti bahwa semua data sub-grup yang digunakan pada Tahap I, sebanyak 30 sub-grup, merupakan HDS . Dengan demikian, $\bar{\bar{X}}$ dan $\bar{\bar{S}}$ yang diperoleh pada *Langkah 3* dan *Langkah 6* merupakan $\bar{\bar{X}}_{HDS}$ dan $\bar{\bar{S}}_{HDS}$. Jadi,

$$\bar{\bar{X}}_{HDS} = \begin{pmatrix} -0,00036 \\ 0,00090 \\ 0,00238 \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{\bar{S}}_{HDS} = \begin{pmatrix} 0,00008 & 0,00003 & 0,00006 \\ 0,00003 & 0,00010 & 0,00009 \\ 0,00006 & 0,00009 & 0,00031 \end{pmatrix}.$$

Tahap II

Karena μ dan Σ tidak diketahui, maka nilai $\bar{\bar{X}}_{HDS}$ dan $\bar{\bar{S}}_{HDS}$ yang diperoleh pada Tahap I kita gunakan sebagai pengganti nilai kedua parameter tersebut. Selanjutnya, kita buat diagram kontrol T^2 dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dari sub-grup yang berukuran n . Data berbentuk matriks berukuran $(n \times p)$ yang terdiri atas n baris dan p kolom,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

di mana x_{ij} adalah data tentang variabel ke- j pada unit sampel ke- i ; i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata,

$$\bar{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

di mana $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data variabel ke- j ; $j = 1, 2, \dots, p$.

Langkah 3: Pusatkan rata-rata sub-grup terhadap $\bar{\bar{X}}_{HDS}$ yang diperoleh di akhir Tahap I.

Langkah 4: Hitung $T^2 = (n-1)(\bar{X} - \bar{\bar{X}}_{HDS})^t \bar{S}_{HDS}^{-1}(\bar{X} - \bar{\bar{X}}_{HDS})$. Nilai $\bar{S}_{HDS}$ diberikan di akhir Tahap I.

Langkah 5: Hitung $UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)} F_{\alpha; p, m(n-1)-(p-1)}$.

Langkah 6: Diagram kontrol T^2 diperoleh dengan memplot nilai T^2 dan nilai UCL pada satu diagram yang sama.

Langkah 7: Jika diagram kontrol menunjukkan keadaan terkontrol, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan Langkah 1. Jika sebaliknya, maka perlu diselidiki apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi Langkah 1. Jika *true alarm*, penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC diikuti dengan upaya peningkatan kualitas proses.

Contoh 5.3.

Contoh berikut adalah kelanjutan dari contoh pada Tahap I di atas. Seperti telah dikemukakan pada Contoh 5.2 di Tahap I, pada Tahap II ini akan dilaporkan proses pengontrolan berdasarkan sub-grup (observasi akhir mingguan) berukuran $n = 5$ selama 21 minggu.

Langkah 1: Pengumpulan data dari sub-grup yang berukuran n

Ada 21 buah tabel data berukuran $n = 5$ baris dan 3 kolom seperti Tabel 5.5. Rata-rata sub-grup dapat dilihat pada Tabel 5.8.

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata

Rata-rata *log-return* mingguan selama pengontrolan disajikan pada Tabel 5.8.

Tabel 5.8. Rata-rata *log-return* mingguan selama pengontrolan

Minggu	GE	UTX	CAT	Minggu	GE	UTX	CAT
1	-0,00296	-0,00113	0,00135	12	-0,00162	-0,00739	-0,01291
2	0,00170	-0,00258	-0,00011	13	-0,00093	-0,00537	-0,00621
3	0,00377	0,00193	-0,00303	14	0,00169	0,00364	-0,00082
4	0,00329	0,00045	0,00648	15	0,00012	-0,00936	-0,01827
5	-0,00436	-0,00055	0,00150	16	-0,00268	0,00165	0,01150
6	0,00644	-0,00045	0,00115	17	-0,00517	0,00352	0,00400
7	-0,00378	-0,00256	0,00358	18	0,00018	0,00447	0,00578
8	-0,00094	0,01795	0,00594	19	0,00018	-0,00060	-0,00495
9	0,00141	0,00444	-0,00780	20	-0,00728	-0,01408	-0,00957
10	0,00158	-0,00267	0,00558	21	0,00087	0,00387	-0,00244
11	0,00174	0,00862	0,00722				

Langkah 3: Memusatkan rata-rata sub-grup terhadap $\bar{\bar{X}}_{HDS}$

Rata-rata mingguan dipusatkan terhadap $\bar{\bar{X}}_{HDS}$ yang diperoleh pada Tahap 1. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 5.9.

Tabel 5.9. Rata-rata mingguan terpusat

Minggu	GE	UTX	CAT	Minggu	GE	UTX	CAT
1	-0,00260	-0,00203	-0,00103	12	-0,00126	-0,00830	-0,01528
2	0,00205	-0,00348	-0,00249	13	-0,00057	-0,00628	-0,00858
3	0,00412	0,00103	-0,00541	14	0,00204	0,00274	-0,00319
4	0,00365	-0,00046	0,00411	15	0,00047	-0,01027	-0,02065
5	-0,00400	-0,00145	-0,00088	16	-0,00232	0,00075	0,00913
6	0,00680	-0,00135	-0,00123	17	-0,00481	0,00262	0,00162
7	-0,00342	-0,00347	0,00120	18	0,00054	0,00357	0,00340
8	-0,00058	0,01704	0,00356	19	0,00054	-0,00151	-0,00733
9	0,00177	0,00354	-0,01018	20	-0,00692	-0,01499	-0,01194
10	0,00193	-0,00357	0,00321	21	0,00123	0,00297	-0,00482
11	0,00209	0,00771	0,00484				

Langkah 4: Menghitung T_k^2

Seperti pada contoh sebelumnya, proses menghitung nilai statistik T_k^2 dibagi dalam dua bagian.

Pertama, kita hitung vektor A yang sama dengan perkalian matriks antara $(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}}_{HDS})^t$ dan $\bar{S}_{HDS}^{-1}$. Hasilnya tertera pada Tabel 5.10 kolom kedua sampai dengan keempat. Kedua, nilai T_k^2 dihitung sebagai perkalian matriks antara A dan $(n-1)(\bar{X}^k - \bar{\bar{X}}_{HDS})$. Nilai T_k^2 yang diperoleh ada di kolom kelima Tabel 5.10 tersebut.

Tabel 5.10. Nilai T^2 dan UCL mingguan selama 21 minggu pengontrolan

Minggu	A			T_k^2	UCL
	GE	UTX	CAT		
1	-31,49202	-17,01921	7,45767	0,43507	15,73537
2	49,59087	-50,73298	-2,07460	1,135299	15,73537
3	70,47841	20,80361	-36,73835	2,043053	15,73537
4	51,71580	-36,12373	14,70064	1,061977	15,73537
5	-55,85403	-3,71986	8,46051	0,885434	15,73537
6	113,97569	-40,94887	-12,66147	3,384029	15,73537
7	-43,01247	-44,16040	24,93638	1,321245	15,73537
8	-78,77087	245,77098	-47,15396	16,26746	15,73537
9	32,59337	85,60106	-64,65117	4,073106	15,73537
10	37,97033	-73,26983	25,33666	1,66471	15,73537
11	-4,31091	90,16700	-10,25934	2,547581	15,73537
12	37,95567	-62,19893	-38,29535	4,213189	15,73537
13	29,45446	-59,85513	-15,57975	1,970334	15,73537
14	27,55927	45,88128	-29,12106	1,09956	15,73537
15	82,00752	-77,90313	-59,19339	8,243972	15,73537
16	-55,32455	-14,90337	44,33323	2,087504	15,73537
17	-88,09763	51,17931	6,15161	2,270362	15,73537
18	-10,81539	38,88253	1,51199	0,552508	15,73537
19	26,97482	3,24019	-29,81755	0,912837	15,73537
20	-31,91627	-154,87557	12,96744	9,547652	15,73537
21	16,75513	58,62264	-36,24590	1,477348	15,73537

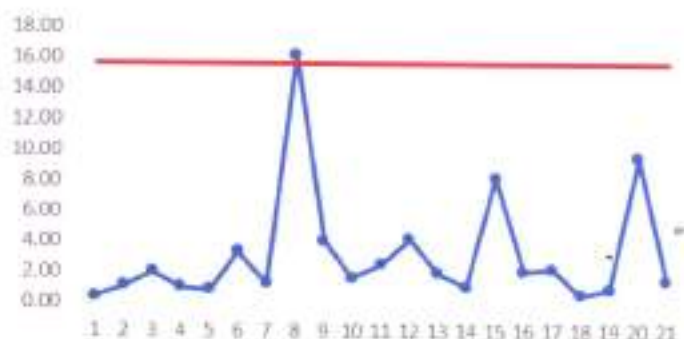
Langkah 5: Menghitung UCL

UCL untuk setiap sub-grup adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan $p = 3$ dan $m(n - 1) - (p - 1) = 30 \cdot 4 - 2 = 118$. Faktor kelipatannya sebesar $L = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)} = \frac{3 \cdot 31 \cdot 4}{30 \cdot 4 - 2} = 3,15254$. Jadi, untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = "L * F.INV(0.0027, 3, 118)" = 15,73537.$$

Hasil komputasi UCL disajikan pada Tabel 5.10 kolom terakhir.

Langkah 6: Diagram kontrol T^2



Gambar 5.3. Diagram kontrol T^2 Tahap II untuk Contoh 5.3

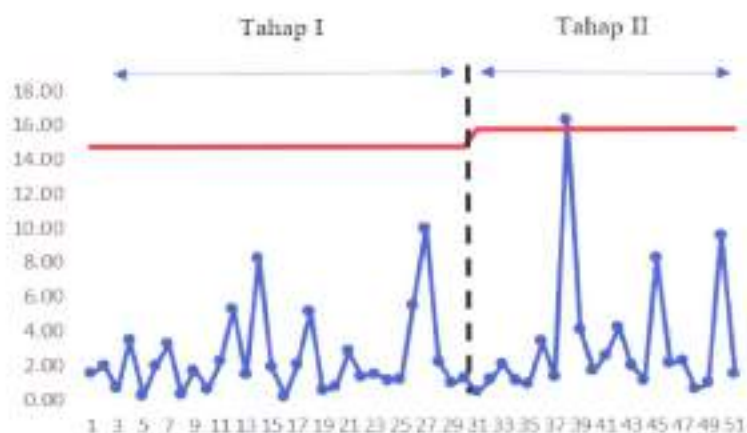
Apabila diagram kontrol T^2 pada Tahap I disambungkan dengan diagram kontrol pada Tahap II, maka diperoleh Gambar 5.4 yang lebih komprehensif. Tampak bahwa batas kontrol di Tahap I berbeda dengan di Tahap II.

Langkah 7: Perilaku ketiga saham GE, UTX dan CAT di NYSE

Pada pengontrolan minggu kedelapan, perilaku ketiga saham GE, UTX dan CAT di NYSE mengalami perubahan yang signifikan. Namun, pada minggu tersebut terjadi shock sesaat yang tidak mengganggu perilaku pasar saham selanjutnya. Hal ini tampak pada gambar di atas pada pengontrolan minggu kesembilan dst.

Catatan:

Penting untuk dicatat, UCL Tahap II akan selalu lebih tinggi posisinya dari UCL Tahap I, ini disebabkan oleh konstanta kelipatan K yang selalu lebih kecil ketimbang L .



Gambar 5.4. Diagram kontrol T^2 Tahap I disambung Tahap II untuk Contoh 5.2-5.3

BAB 6

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN: STATISTIK T^2

Di bidang industri manufaktur khususnya dan di bidang sains natural umumnya, besarnya ukuran sampel mudah dikontrol. Inilah alasannya mengapa di bidang ini, pengontrolan dapat dilakukan berbasis sub-grup berukuran konstan. Selain itu, pengumpulan data memerlukan waktu yang relatif lama dengan biaya yang relatif mahal. Apalagi bila untuk pengumpulan data diperlukan percobaan dan analisis laboratorium. Akibatnya, ukuran sub-grup relatif kecil.

Lain halnya dengan industri jasa dan bidang sains sosial umumnya. Dalam bidang ini,

1. Besarnya ukuran sampel kerap tidak dapat dikontrol sehingga ukuran sub-grup sukar dibuat konstan.
2. Pengumpulan data relatif cepat dengan biaya yang relatif murah sehingga ukuran sub-grup bisa cukup besar.

Oleh karena itu, pengontrolan kualitas proses layanan jasa dan layanan sosial lainnya secara umum didasarkan kepada skenario sampling ketiga, yakni berbasis sub-grup berukuran tak konstan.

Pengontrolan berbasis sub-grup berukuran tak konstan dilakukan tatkala ukuran sub-grup yang satu bisa berbeda dengan ukuran sub-grup yang lain (akan tetapi lebih besar dari p). Tatkala μ dan Σ diketahui, statistik pengontrol yang digunakan didasarkan kepada formula (4.1). Namun, dalam hal kedua parameter ini tidak diketahui, μ dan Σ terlebih dahulu ditaksir pada Tahap I berdasarkan m buah sampel acak yang saling bebas. Selanjutnya, statistik pengontrol yang sesuai dengan rancangan sampling, dikembangkan dari formula (4.1).

Langkah-langkah pengontrolan berbasis sub-grup berukuran tak konstan di bawah ini hampir sama seperti pengontrolan di Bab 5 yang membahas kasus di mana sub-grup berukuran konstan.

1. Bila μ dan Σ Diketahui

Dalam hal μ dan Σ diketahui, sekali lagi, Tahap I tidak diperlukan. Kita langsung saja ke Tahap II.

Tahap II

Langkah-langkah pembuatan diagram kontrol T^2 di sini tidak ada bedanya dengan langkah-langkah pada Tahap I tatkala μ dan Σ diketahui dengan skenario sampling yang kedua. Namun, sebelumnya Σ^{-1} harus kita hitung terlebih dahulu.

Langkah 1: Pengontrolan pertama dimulai dengan mengumpulkan data dari sub-grup yang berukuran n . Data berbentuk matriks berukuran $(n \times p)$ yang terdiri atas n baris dan p kolom,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

di mana x_{ij} adalah data tentang variabel ke- j pada unit sampel ke- i ; i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata sub-grup,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

di mana $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data variabel ke- j ; $j = 1, 2, \dots, p$.

Langkah 3: Pusatkan data sub-grup; hitung $(\bar{X} - \mu)$.

Langkah 4: Hitung $T^2 = n(\bar{X} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$.

Langkah 5: Hitung UCL = $\chi^2_{\alpha;p}$ seperti yang dikemukakan Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019).

Langkah 6: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai T^2 yang diperoleh pada *Langkah 3* bersama dengan nilai UCL.

Langkah 7: Jika diagram kontrol menunjukkan keadaan terkontrol, artinya $T^2 < \text{UCL}$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya (mungkin dengan nilai n yang berbeda) dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Nilai n pada saat pengontrolan berikutnya bisa berbeda dengan saat pengontrolan lainnya. Jika T^2 berada di luar daerah kontrol, maka perlu diselidiki apakah telah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC diikuti dengan upaya peningkatan kualitas proses.

Contoh 6.1.

Contoh ini mengemukakan tentang bagaimana mengontrol capaian prestasi akademik siswa dalam tiga matapelajaran yang tersebar di 20 kelas; Bahasa Indonesia (BI), Bahasa Inggris (Eng), dan Matematika (Mat). Ketiga matapelajaran ini dipandang sangat penting dan strategis dalam melatih ketajaman logika berfikir. Prestasi akademik dinyatakan dalam bentuk skor dengan skala 0 – 10.

Dari pengalaman bertahun-tahun, diketahui bahwa skor ketiga matapelajaran itu dapat dianggap berdistribusi normal multivariat dengan μ dan Σ sebagai berikut,

$$\mu = \begin{pmatrix} 6,86075 \\ 6,58423 \\ 6,49634 \end{pmatrix} \text{ dan } \Sigma = \begin{pmatrix} 0,50365 & 0,20385 & 0,24455 \\ 0,20385 & 0,37286 & 0,20485 \\ 0,24455 & 0,20485 & 0,48113 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, inversi dari matriks Σ adalah,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2,90249 & -1,01346 & -1,04376 \\ -1,01346 & 3,85480 & -1,12611 \\ -1,04376 & -1,12611 & 3,08840 \end{pmatrix}.$$

Langkah 1: Mengumpulkan data sub-grup

Dari 20 kelas yang hendak dikontrol, dikumpulkan data skor nilai ketiga matapelajaran itu yang dicapai setiap siswa di setiap kelas. Adapun banyak siswa di setiap kelas dapat dilihat pada Tabel 6.1(a) berikut ini.

Tabel 6.1(a). Banyak siswa di setiap kelas

Kelas	Banyak Siswa	Kelas	Banyak Siswa
1	37	11	43
2	41	12	45
3	39	13	43
4	42	14	44
5	41	15	43
6	40	16	41
7	41	17	45
8	42	18	39
9	39	19	42
10	41	20	37

Karena terlampaui banyak data yang terkumpul, maka pada Tabel 6.1(b) di bawah ini hanya ditampilkan data Kelas No. 1 sebagai contoh beserta rata-rata kelasnya. Data lengkap ada di Tabel 16.1 di Bab 16.

Tabel 6.1(b). Data skor nilai matapelajaran di Kelas No. 1

Kelas	BI	Eng	Mat	Kelas	BI	Eng	Mat
1	6,45	6,93	5,55	21	6,15	6,03	5,93
2	5,67	6,23	6,09	22	6,45	5,55	6,06
3	7,02	6,35	6,34	23	6,58	6,23	5,75
4	6,00	5,95	6,01	24	6,01	6,25	5,86
5	7,11	6,95	6,75	25	6,48	6,45	6,01
6	6,35	6,12	5,56	26	6,00	6,35	5,69
7	7,56	7,01	6,25	27	8,22	7,34	8,01
8	5,96	6,01	6,25	28	7,77	6,95	6,35
9	6,35	7,31	5,59	29	8,35	6,35	6,66
10	6,66	5,98	6,38	30	6,17	5,44	6,45
11	7,34	5,35	6,09	31	6,66	6,46	5,38
12	5,80	6,84	6,05	32	7,77	7,34	7,11
13	6,94	6,56	6,01	33	6,54	6,11	6,35
14	6,45	6,57	5,55	34	6,66	6,75	7,25
15	7,45	6,00	5,89	35	7,77	6,75	6,75
16	6,66	6,12	7,12	36	6,35	6,33	6,19
17	7,77	6,45	6,66	37	6,00	6,66	5,90
18	6,07	6,72	5,45				
19	6,25	6,21	5,78				
20	6,00	5,96	6,10				

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata,

Rata-rata setiap matapelajaran di setiap kelas disajikan pada Tabel 6.2.

Tabel 6.2. Skor rata-rata setiap kelas

Kelas	BI	Eng	Mat
1	6,69703	6,40432	6,19378
2	6,69927	6,60385	6,37634
3	6,80564	6,58795	6,36821
4	6,89786	6,71786	6,59262
5	6,72390	6,63976	6,72951
6	6,59500	6,16450	6,38000
7	6,75463	6,44610	6,39366
8	6,89667	6,66000	6,62881
9	6,91949	6,64385	6,75205
10	6,97951	6,59220	6,50634
11	6,77953	6,34651	6,27558
12	6,84533	6,79333	6,49178
13	6,73512	6,62558	6,39349
14	6,91977	6,64295	6,62568
15	6,79744	6,56744	6,41930
16	6,82756	6,49537	6,49829
17	7,03156	6,61556	6,47356
18	6,90231	6,58410	6,45744
19	6,98738	6,57381	6,68190
20	6,69216	6,57459	6,31514

Langkah 3: Memusatkan data; menghitung $(\bar{X} - \mu)$.

Sekarang, vektor data rata-rata kelas pada setiap baris Tabel 6.2 kita pusatkan terhadap vektor μ . Hasilnya tampak pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3. Skor terpusat setiap kelas

Kelas	BI	Eng	Mat
1	-0,16372	-0,17990	-0,30255
2	-0,16148	0,02163	-0,12000
3	-0,05511	0,00372	-0,12813
4	0,03711	0,13363	0,09628
5	-0,13684	0,05553	0,23317
6	-0,26575	-0,41972	-0,11634
7	-0,10611	-0,13813	-0,10268
8	0,03592	0,07578	0,13247
9	0,05874	0,05962	0,25571
10	0,11877	0,00797	0,01000
11	-0,08121	-0,23771	-0,22076
12	-0,01541	0,20911	-0,00456
13	-0,12563	0,04136	-0,10285
14	0,05903	0,05873	0,12934
15	-0,06331	-0,01678	-0,07704
16	-0,03319	-0,08886	0,00196
17	0,17081	0,03133	-0,02278
18	0,04156	-0,00012	-0,03890
19	0,12663	-0,01042	0,18557
20	-0,16858	-0,00963	-0,18120

Langkah 4: Menghitung T^2

Seperti telah dikemukakan di depan, menghitung $T^2 = n(\bar{X} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$ kita lakukan dalam dua bagian. *Pertama*, kita hitung vektor $A = (\bar{X} - \mu)^t \Sigma^{-1}$. *Kedua*, kita hitung T^2 yang sama dengan perkalian matriks antara vektor A dan vektor $n(\bar{X} - \mu)$. Di sini, nilai n menunjukkan banyaknya siswa di kelas yang sedang kita kontrol. Hasil perhitungan vektor A ditampilkan pada Tabel 6.4 kolom ketiga sampai dengan kelima. Sedangkan nilai T^2 ada di kolom keenam.

Tabel 6.4. Skor terpusat setiap kelas

Kelas	n	A			T ²	UCL
		BI	Eng	Mat		
1	37	0,02292	-0,18685	-0,56093	7,38424	14,15625
2	41	-0,36536	0,38216	-0,22641	3,87171	14,15625
3	39	-0,02998	0,21449	-0,34240	1,80661	14,15625
4	42	-0,12821	0,36909	0,10814	2,30900	14,15625
5	41	-0,69685	0,09017	0,80044	11,76736	14,15625
6	40	-0,22453	-1,21762	0,39074	21,01103	14,15625
7	41	-0,06083	-0,30928	-0,05081	2,23011	14,15625
8	42	-0,11081	0,10652	0,28630	1,76478	14,15625
9	39	-0,15684	-0,11766	0,66130	5,96212	14,15625
10	41	0,32619	-0,10091	-0,10204	1,51353	14,15625
11	43	0,23561	-0,58543	-0,32933	8,28746	14,15625
12	45	-0,25190	0,82683	-0,23347	8,00297	14,15625
13	43	-0,29921	0,40256	-0,23308	3,36304	14,15625
14	44	-0,02320	0,02092	0,27172	1,54020	14,15625
15	43	-0,08633	0,08621	-0,15294	0,67939	14,15625
16	41	-0,00831	-0,31110	0,14074	1,15600	14,15625
17	45	0,48780	-0,02668	-0,28392	4,00284	14,15625
18	39	0,16136	0,00122	-0,16338	0,50941	14,15625
19	42	0,18442	-0,37746	0,45266	4,67393	14,15625
20	37	-0,29042	0,33779	-0,37282	4,19076	14,15625

Langkah 5: Menghitung UCL

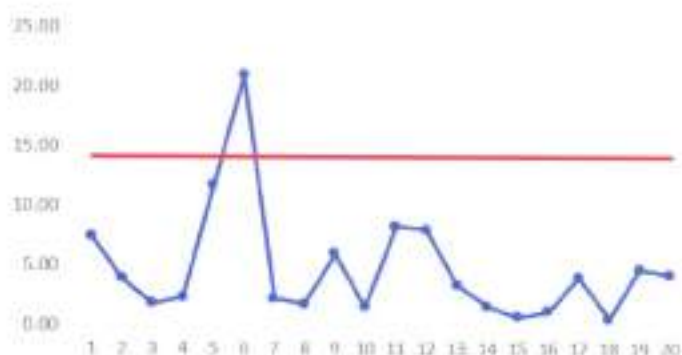
Untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, UCL adalah kuantil ke-99,73% dari distribusi Chi-Squared dengan derajat kebebasan $p = 3$ atau $\chi^2_{0,0027;3}$. Dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = "-\text{CHIINV}(0.0027, 3)" = 14,156.$$

UCL untuk setiap kelas diberikan pada Tabel 6.4 kolom terakhir. Walaupun banyak murid n bisa berbeda-beda dari kelas ke kelas, pada kasus di mana μ dan Σ diketahui, nilai UCL tidak tergantung kepada n .

Langkah 6: Membuat diagram kontrol T^2

Dengan memplot data nilai T^2 dan nilai UCL yang ada di Tabel 6.4 pada satu diagram yang sama, kita peroleh diagram kontrol T^2 seperti tampak pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1. Diagram kontrol T^2 untuk Contoh 6.1

Langkah 7: Apakah ada kelas dengan proses belajar mengajar yang berbeda?

Pada gambar di atas tampak bahwa proses belajar mengajar di Kelas No. 6 memiliki kelainan sehingga kelas tersebut berada dalam keadaan OOC. Kelas itu memiliki rata-rata kelas yang rendah secara signifikan di antara kelas-kelas lainnya. Keadaan ini menuntut manajemen sekolah untuk menyelidiki akar penyebab kelas tersebut OOC lalu mendiskusikannya dengan para guru.

Sebagai contoh umpamanya, mari kita lihat Tabel 6.3 (Skor terpusat setiap kelas) baris ke-6. Pada baris tersebut, $BI = -0,26575$, $Eng = -0,41972$, dan $Mat = -0,11634$. Ketiga-tiganya bernilai negatif. Ini berarti, skor rata-rata Kelas No. 6 lebih kecil dari rata-rata total (*grand mean*). Dengan kata lain, proses belajar mengajar di Kelas No. 6 berbeda dengan di kelas-kelas lainnya dan membuahkan hasil (capaian akademik) yang rendah.

2. Bila μ dan Σ Tidak Diketahui

Dalam hal μ dan Σ tidak diketahui, pengontrolan proses dimulai dengan menaksir kedua parameter μ dan Σ ini pada Tahap I. Cara menaksirnya sebagai berikut.

Tahap I

Pada Tahap I ini kita lakukan langkah-langkah berikut.

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup yang saling bebas, di mana sub-grup ke-1, sub-grup ke-2, ..., sub-grup ke- m , berukuran $n_1, n_2, \dots, n_m$. Data yang terkumpul berupa m buah matriks dengan banyak kolom yang sama yaitu p dan banyak baris yang bisa berbeda,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 & \dots & x_{1p}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 & \dots & x_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_1 1}^1 & x_{n_1 2}^1 & \dots & x_{n_1 p}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 & \dots & x_{1p}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & \dots & x_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_2 1}^2 & x_{n_2 2}^2 & \dots & x_{n_2 p}^2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{11}^m & x_{12}^m & \dots & x_{1p}^m \\ x_{21}^m & x_{22}^m & \dots & x_{2p}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_m 1}^m & x_{n_m 2}^m & \dots & x_{n_m p}^m \end{pmatrix},$$

di mana x_{ij}^k adalah data variabel ke- j pada unit sampel ke- i untuk sub-grup ke- k .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari setiap sub-grup. Vektor rata-rata sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^k \\ \bar{x}_2^k \\ \vdots \\ \bar{x}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{x}_j^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Hitung vektor rata-rata total dari keseluruhan m buah sub-grup tersebut (vektor *grand mean*), yakni

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m n_k \bar{X}^k \text{ dengan } N = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Langkah 4: Pusatkan vektor rata-rata sub-grup terhadap vektor rata-rata total; untuk sub-grup ke- k , hitung $(\bar{X}^k - \bar{X})$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 5: Hitung matriks kovariansi untuk setiap sub-grup. Pada sub-grup ke- k , matriks kovariansi adalah,

$$S^k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t,$$

$$\text{di mana } X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data sub-grup ke-}k.$$

Langkah 6: Hitung $\bar{S}$ matriks rata-rata berbobot dari semua matriks kovariansi sampel,

$$\bar{S} = \frac{1}{N - m} \sum_{k=1}^m (n_k - 1) S^k.$$

Langkah 7: Hitung matriks $\bar{S}^{-1}$ inversi dari matriks $\bar{S}$

Langkah 8: Hitung $T_k^2 = (n_k - 1)(\bar{X}^k - \bar{X})^t \bar{S}^{-1}(\bar{X}^k - \bar{X})$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 9: Hitung UCL untuk setiap sub-grup. UCL untuk sub-grup ke- k adalah

$$UCL_k = \frac{p(m-1)(n_k-1)}{m(n_k-1)-(p-1)} F_{\alpha; p, m(n_k-1)-(p-1)}.$$

Langkah 10: Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai statistik $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ dan nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 11: Bila ada $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ yang berada di luar daerah kontrol, hitung $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$ yakni rata-rata total (*grand mean*) dan rata-rata berbobot dari semua sub-grup yang berada di dalam *HDS* (di dalam daerah kontrol). Kemudian terus ke Tahap II dengan menggunakan $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$ sebagai penaksir μ dan Σ . Bila semua nilai statistik itu berada di dalam daerah kontrol, gunakanlah $\bar{X}$ dan $\bar{S}$ pada *Langkah 3* dan *Langkah 6* sebagai $\bar{X}_{HDS}$ dan $\bar{S}_{HDS}$.

Contoh 6.2.

Pada contoh ini akan dikemukakan peran MVSPC dalam mengontrol capaian akademik mahasiswa pada semester pertama tahun pertama bersama di sebuah Perguruan Tinggi. Dipilih semester tersebut mengingat ini merupakan masa yang sangat penting dan genting dalam kehidupan akademik mahasiswa. Mereka baru saja bermetamorfosis dari kehidupan akademik yang dikontrol Sekolah ke kehidupan akademik yang bebas di bawah tanggung jawab pribadi masing-masing mahasiswa.

Data yang dikumpulkan berupa skor nilai setiap matakuliah dalam skala 0 – 4 yang meliputi 8 matakuliah berikut; A (Pancasila), B (Kewarganegaraan), C (Bahasa Inggris), D (Kalkulus), E (Algoritma), F (Praktikum C++), G (Teknik Informatik), dan H (Matematika Diskrit).

Ada 20 kelas (sub-grup) yang digunakan pada Tahap I untuk menaksir nilai parameter μ dan Σ . Banyaknya mahasiswa di kelas yang satu bisa berbeda dengan di kelas yang lain. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengambilan m buah sub-grup berukuran tak konstan

Banyaknya sub-grup (kelas) $m = 20$ dan banyaknya mahasiswa (n) di setiap sub-grup disajikan di Tabel 6.5. Dari tabel ini diperoleh N (banyak total mahasiswa) = 474.

Tabel 6.5. Data ukuran sub-grup (kelas)

No. Kelas	n	No. Kelas	n
1	21	11	23
2	24	12	22
3	22	13	25
4	27	14	24
5	25	15	26
6	25	16	20
7	24	17	24
8	26	18	23
9	29	19	20
10	21	20	23

Jadi, pada langkah pertama dikumpulkan 20 buah matriks data yang terdiri atas 8 kolom. Adapun banyaknya baris berubah-ubah; 21 baris untuk Kelas 1, 24 baris untuk Kelas 2, ..., 23 baris untuk Kelas 20. Berikut, pada Tabel 6.6, ditampilkan matriks data Kelas No. 19 tentang skor nilai mahasiswa (disingkat Mhs) nomor 1 sampai dengan nomor 20. Matriks data untuk 19 buah kelas lainnya tidak ditampilkan dalam buku ini mengingat ruang yang terbatas.

Namun, vektor rata-ratanya (nilai rata-rata kelas) ditampilkan secara lengkap pada Tabel 6.7 mengingat peran penting data ini dalam menentukan diagram kontrol.

Tabel 6.6. Data skor nilai semua matakuliah Kelas 19

Mhs	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3,71	3,75	4,00	4,00	2,62	4,00	3,20	2,00
2	3,88	4,00	2,83	4,00	4,00	4,00	2,75	4,00
3	3,86	3,81	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
4	3,52	3,85	3,42	1,52	1,86	3,10	2,39	1,34
5	3,59	3,91	4,00	3,48	4,00	4,00	2,75	4,00
6	3,31	3,82	3,51	4,00	3,12	4,00	2,61	2,66
7	3,61	3,80	2,92	2,83	2,58	2,73	2,11	2,89
8	3,31	3,24	2,23	1,01	0,96	2,00	0,78	0,81
9	4,00	3,77	3,57	3,93	4,00	4,00	3,98	3,86
10	4,00	3,23	4,00	2,79	1,24	4,00	2,44	3,82
11	4,00	3,00	2,82	1,14	1,86	2,44	2,42	2,71
12	4,00	3,14	3,20	2,76	4,00	3,41	3,86	3,64
13	4,00	3,42	2,51	3,94	2,03	2,68	2,49	2,53
14	4,00	3,41	4,00	3,67	3,86	4,00	3,43	3,37
15	4,00	3,37	4,00	0,68	2,38	4,00	2,74	2,35
16	4,00	3,43	3,65	3,71	3,00	4,00	2,24	4,00
17	3,47	2,74	2,95	2,18	2,32	3,25	3,06	2,21
18	3,45	3,25	3,83	2,18	2,55	1,70	4,00	2,00
19	3,56	2,39	4,00	2,40	2,89	1,51	4,00	2,00
20	3,27	2,90	4,00	2,02	1,81	4,00	3,31	2,06

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata setiap sub-grup

Hasil perhitungan vektor rata-rata (rata-rata kelas) disajikan pada Tabel 6.7.

Tabel 6.7. Rata-rata kelas skor nilai semua matakuliah semua kelas

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3,78	3,44	3,54	2,79	3,23	3,68	3,01	3,13
2	3,77	3,57	3,78	2,96	3,46	3,71	3,22	3,33
3	3,77	3,43	3,82	2,77	3,19	3,71	3,00	3,27
4	3,72	3,54	3,58	2,74	3,22	3,62	2,87	3,29
5	3,74	3,44	3,83	2,97	3,25	3,52	3,15	3,12
6	3,76	3,49	3,81	2,84	3,26	3,73	3,17	3,34
7	3,75	3,51	3,78	3,16	3,46	3,65	3,45	3,34
8	3,69	3,42	3,76	2,76	2,99	3,49	3,08	2,91
9	3,72	3,51	3,68	2,96	3,14	3,51	3,09	3,22
10	3,79	3,55	3,64	3,18	3,55	3,60	3,12	3,19
11	3,73	3,50	3,84	2,89	3,24	3,74	3,12	3,12
12	3,76	3,53	3,75	3,17	3,53	3,64	3,21	3,44
13	3,74	3,47	3,64	3,04	3,10	3,57	3,17	3,26
14	3,75	3,55	3,68	2,74	3,00	3,50	2,87	3,08
15	3,76	3,45	3,64	2,99	2,98	3,56	2,81	3,18
16	3,76	3,54	3,79	2,84	3,32	3,38	3,14	3,15
17	3,70	3,53	3,65	3,05	3,04	3,47	2,99	3,07
18	3,78	3,56	3,63	2,96	3,28	3,40	3,15	3,19

19	3,73	3,41	3,47	2,81	2,76	3,34	2,93	2,81
20	3,71	3,50	3,58	2,73	3,13	3,40	3,14	3,13

Langkah 3: Menghitung vektor rata-rata total (grand mean)

Vektor rata-rata total adalah rata-rata berbobot dari kedua puluh baris pada Tabel 6.7 di atas. Diperoleh vektor rata-rata total sebagai berikut.

Tabel 6.8. Rata-rata total skor nilai semua matakuliah semua kelas

A	B	C	D	E	F	G	H
3,74	3,50	3,70	2,92	3,20	3,56	3,08	3,18

Langkah 4: Memusatkan vektor rata-rata sub-grup terhadap vektor grand mean

Hasil pemusatan vektor rata-rata kelas terhadap vektor rata-rata total (*grand mean*) diberikan pada Tabel 6.9.

Tabel 6.9. Vektor rata-rata kelas terpusat terhadap vektor rata-rata total

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,03	-0,06	-0,16	-0,13	0,03	0,12	-0,07	-0,05
2	0,02	0,07	0,08	0,04	0,26	0,14	0,14	0,15
3	0,02	-0,07	0,12	-0,15	-0,01	0,15	-0,08	0,08
4	-0,02	0,05	-0,11	-0,18	0,01	0,06	-0,21	0,11
5	-0,01	-0,06	0,13	0,05	0,05	-0,05	0,07	-0,06
6	0,02	-0,01	0,12	-0,08	0,06	0,17	0,08	0,16
7	0,00	0,01	0,09	0,24	0,26	0,09	0,37	0,16
8	-0,05	-0,08	0,06	-0,16	-0,21	-0,07	-0,01	-0,27
9	-0,02	0,02	-0,02	0,04	-0,06	-0,06	0,01	0,04
10	0,05	0,05	-0,06	0,26	0,34	0,04	0,03	0,01
11	-0,01	0,01	0,14	-0,03	0,03	0,18	0,04	-0,06
12	0,01	0,03	0,05	0,25	0,32	0,08	0,13	0,26
13	0,00	-0,03	-0,05	0,12	-0,10	0,01	0,09	0,08
14	0,01	0,06	-0,02	-0,18	-0,20	-0,06	-0,22	-0,10
15	0,01	-0,05	-0,06	0,07	-0,22	0,00	-0,28	-0,01
16	0,02	0,05	0,10	-0,08	0,12	-0,19	0,06	-0,04
17	-0,05	0,03	-0,05	0,14	-0,17	-0,09	-0,10	-0,11
18	0,03	0,07	-0,07	0,05	0,08	-0,16	0,07	0,00
19	-0,02	-0,09	-0,22	-0,10	-0,44	-0,22	-0,16	-0,37
20	-0,03	0,00	-0,12	-0,19	-0,07	-0,17	0,05	-0,05

Langkah 5: Menghitung matriks kovariansi untuk setiap sub-grup

Dari 20 buah matriks data, masing-masing menentukan satu matriks kovariansi, diperoleh 20 buah matriks kovariansi $S^1, S^2, \dots$, dan S^{20} . Untuk matriks data Kelas 19 yang tertera pada Tabel 6.6, hasil komputasi memberikan matriks kovariansi S^{19} berikut ini.

$$S^{19} = \begin{pmatrix} 0,07580 & 0,01648 & 0,00876 & 0,08166 & 0,08869 & 0,07722 & 0,03864 & 0,17245 \\ 0,01648 & 0,18929 & 0,00015 & 0,24817 & 0,16930 & 0,19287 & -0,05944 & 0,15544 \\ 0,00876 & 0,00015 & 0,33475 & 0,11880 & 0,17383 & 0,20698 & 0,28082 & 0,14656 \\ 0,08166 & 0,24817 & 0,11880 & 1,26386 & 0,71330 & 0,46566 & 0,29694 & 0,69974 \\ 0,08869 & 0,16930 & 0,17383 & 0,71330 & 0,93937 & 0,35530 & 0,47973 & 0,66863 \\ 0,07722 & 0,19287 & 0,20698 & 0,46566 & 0,35530 & 0,75337 & 0,07400 & 0,50632 \\ 0,03864 & -0,05944 & 0,28082 & 0,29694 & 0,47973 & 0,07400 & 0,67610 & 0,24769 \\ 0,17245 & 0,15544 & 0,14656 & 0,69974 & 0,66863 & 0,50632 & 0,24769 & 0,95631 \end{pmatrix}$$

Langkah 6: Menghitung matriks $\bar{S}$ rata-rata berbobot

Matriks kovariansi $S^1, S^2, \dots$, dan S^{20} yang dihitung pada *Langkah 5* selanjutnya memberikan matriks rata-rata berbobot $\bar{S}$ berikut.

$\bar{S} = \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^m (n_k - 1) S^k$ dengan $N = 474$, $m = 20$ dan n_k diberikan pada Tabel 6.5.

$$= \frac{1}{474-20} \{ (21-1)S^1 + (24-1)S^2 + (22-1)S^3 + \dots + (23-1)S^{20} \}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,06117 & 0,00948 & 0,01143 & 0,09833 & 0,05176 & 0,04950 & 0,04470 & 0,08696 \\ 0,00948 & 0,19575 & 0,02840 & 0,15165 & 0,18705 & 0,11442 & 0,00609 & 0,15306 \\ 0,01143 & 0,02840 & 0,21606 & 0,07608 & 0,14321 & 0,13524 & 0,13378 & 0,11141 \\ 0,09833 & 0,15165 & 0,07608 & 0,98008 & 0,48464 & 0,30925 & 0,36486 & 0,51220 \\ 0,05176 & 0,18705 & 0,14321 & 0,48464 & 0,82181 & 0,41947 & 0,38086 & 0,54617 \\ 0,04950 & 0,11442 & 0,13524 & 0,30925 & 0,41947 & 0,55977 & 0,15517 & 0,42571 \\ 0,04470 & 0,00609 & 0,13378 & 0,36486 & 0,38086 & 0,15517 & 0,57931 & 0,25128 \\ 0,08696 & 0,15306 & 0,11141 & 0,51220 & 0,54617 & 0,42571 & 0,25128 & 0,74274 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Hitung matriks $\bar{S}^{-1}$

Matriks inversi dari $\bar{S}$ pada *Langkah 6* adalah $\bar{S}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 21,23289 & 0,88829 & 0,17843 & -1,39390 & 1,12374 & -0,38416 & -0,50570 & -2,16971 \\ 0,88829 & 7,81954 & -0,57169 & -0,88190 & -1,98014 & 0,11221 & 1,93128 & -0,28317 \\ 0,17843 & -0,57169 & 6,19887 & 0,50368 & 0,10293 & -1,36067 & -1,46877 & 0,02085 \\ -1,39390 & -0,88190 & 0,50368 & 2,03165 & -0,03007 & -0,09943 & -0,90962 & -0,74480 \\ 1,12374 & -1,98014 & 0,10293 & -0,03007 & 3,83505 & -1,08497 & -1,72298 & -1,33350 \\ -0,38416 & 0,11221 & -1,36067 & -0,09943 & -1,08497 & 3,81161 & 0,66977 & -1,31893 \\ -0,50570 & 1,93128 & -1,46877 & -0,90962 & -1,72298 & 0,66977 & 3,52370 & 0,19977 \\ -2,16971 & -0,28317 & 0,02085 & -0,74480 & -1,33350 & -1,31893 & 0,19977 & 3,83822 \end{pmatrix}$$

Langkah 8: Menghitung nilai statistik T_k^2

Sekali lagi, cara menghitung T_k^2 dengan $k = 1, 2, \dots, 20$, kita bagi dalam dua bagian. *Pertama*, menghitung hasil kali antara vektor $(\bar{X}^k - \bar{X})^t$ dan matriks $\bar{S}^{-1}$. Di sini $\bar{X}^k$, $\bar{X}$ dan $\bar{S}^{-1}$ diberikan pada *Langkah 2*, *Langkah 3* dan *Langkah 7*. Hasilnya disajikan pada Tabel 6.10.

Tabel 6.10. Hasil perkalian $(\bar{X}^k - \bar{X})^t \bar{S}^{-1}$

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,92030	-0,41201	-1,06313	-0,24373	0,30318	0,64742	-0,00754	-0,34981
2	0,34218	0,23266	0,12799	-0,22325	0,28367	0,04920	0,13746	-0,03673
3	0,43022	-0,57551	0,64918	-0,21474	-0,01881	0,25325	-0,32480	0,20981
4	-0,29014	0,11334	-0,57685	-0,32345	0,08405	0,10980	-0,28627	0,43878
5	-0,06394	-0,55221	0,85556	0,21660	0,32812	-0,29625	-0,23777	-0,22983
6	0,16392	-0,02281	0,36124	-0,33190	-0,25370	0,25772	0,20782	0,33826
7	-0,56205	-0,00780	0,02342	0,04732	0,02873	-0,05293	0,61856	0,04674
8	-0,55183	-0,06261	0,42016	0,06783	-0,25984	0,24455	0,17106	-0,39921
9	-0,70589	0,20830	-0,04029	0,06463	-0,31872	-0,16316	0,14517	0,33774
10	1,05764	-0,35471	-0,31116	0,33842	1,13818	-0,17442	-0,52686	-0,78036
11	-0,06221	0,03354	0,54869	0,01585	-0,07027	0,57825	0,02922	-0,46249
12	-0,32490	-0,43369	0,18667	0,16762	0,53942	-0,41140	-0,24676	0,25010
13	-0,52812	0,02273	-0,38413	0,10685	-0,59296	0,13944	0,40831	0,36733
14	0,59775	0,60521	0,14926	-0,15040	-0,29079	0,00393	-0,19278	0,03226
15	0,06714	-0,48116	0,09065	0,39822	-0,27162	0,12800	-0,67051	0,14743
16	0,74893	0,26397	0,71058	-0,18663	0,52966	-0,87337	-0,10712	-0,02121
17	-1,06244	0,24614	-0,01266	0,48166	-0,34314	-0,00996	-0,11350	-0,10758
18	0,74030	0,50164	-0,29168	-0,09328	0,23975	-0,56877	0,17317	0,01520
19	0,12654	0,19343	-0,91652	0,22655	-0,57231	0,33284	0,26162	-0,42879
20	-0,38782	0,42877	-0,67772	-0,38017	-0,14328	-0,26385	0,53495	0,32528

Kedua, menghitung nilai T_k^2 untuk setiap sub-grup $k = 1, 2, \dots, 20$ dengan cara yang sama seperti pada Bab 4 dan Bab 5. Semua nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{20}^2$ disajikan pada Tabel 6.11, kolom kedua dan kelima.

Tabel 6.11. Nilai statistik T^2 dan UCL_k untuk setiap sub-grup

k	T_k^2	UCL_k	k	T_k^2	UCL_k
1	7,14657	23,31010	11	4,59687	23,22437
2	2,73976	23,18727	12	4,38362	23,26513
3	5,07945	23,26513	13	3,76257	23,15335
4	6,49098	23,09353	14	3,67483	23,18727
5	4,49630	23,15335	15	7,32221	23,12221
6	4,08354	23,15335	16	6,18900	23,35997
7	5,76364	23,18727	17	4,73064	23,18727
8	4,78259	23,12221	18	4,21861	23,22437
9	1,93028	23,04247	19	8,74940	23,35997
10	9,97229	23,31010	20	4,97664	23,22437

Langkah 9: Hitung UCL setiap sub-grup

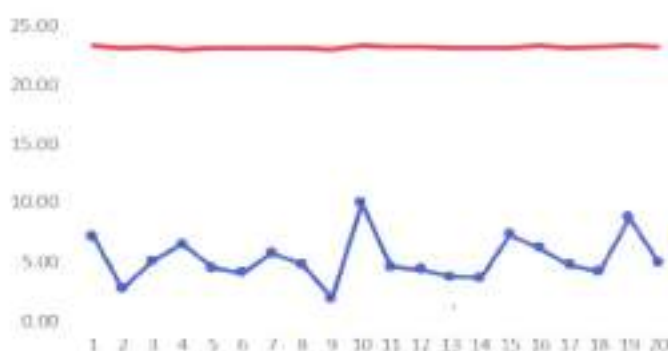
UCL untuk sub-grup ke- k adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan $p = 8$ dan $m(n_k - 1) - (p - 1)$ yang harganya berubah-ubah tergantung n_k . Faktor kelipatannya sebesar $K = \frac{p(m-1)(n_k-1)}{m(n_k-1)-(p-1)}$ juga tergantung n_k . Jadi, untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL_k = "K * F.INV(0.0027, 8, 20 * (n_k - 1) - (8 - 1))"$$

Hasil komputasi UCL_k disajikan pada Tabel 6.11, kolom ketiga dan keenam.

Langkah 10: Membuat diagram kontrol T^2

Gambar 6.2 memamerkan diagram kontrol T^2 yang kita peroleh dengan memplot nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{20}^2$ dan nilai $UCL_1, UCL_2, \dots, UCL_{20}$ pada satu diagram yang sama.



Gambar 6.2. Diagram kontrol T^2 pada Tahap I untuk Contoh 6.2

Langkah 11: Menentukan HDS

Pada Gambar 6.2 tampak bahwa semua nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{20}^2$ berada di daerah kontrol. Dengan demikian, kedua puluh sub-grup yang digunakan pada Tahap I merupakan HDS. Akibatnya, $\bar{X}$ dan S yang diperoleh pada *Langkah 3* dan *Langkah 6* adalah $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang akan kita gunakan untuk menaksir μ dan Σ dan melakukan pengontrolan di Tahap II.

Tahap II

Langkah-langkah pengontrolan kualitas proses di Tahap II adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dari sub-grup yang berukuran n . Data yang terkumpul berbentuk matriks berukuran $(n \times p)$ yang terdiri atas n baris dan p kolom,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

di mana x_{ij} adalah data tentang variabel ke- j pada unit sampel ke- i , i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

di mana $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data variabel ke- j ; $j = 1, 2, \dots, p$.

Langkah 3: Pusatkan data; hitung $(\bar{X} - \bar{X}_{HDS})$; $\bar{X}_{HDS}$ diperoleh pada Tahap 1.

Langkah 4: Hitung $T^2 = (n-1)(\bar{X} - \bar{X}_{HDS})^t S^{-1}(\bar{X} - \bar{X}_{HDS})$.

Langkah 5: Hitung $UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-(p-1)} F_{\alpha;p,m(n-1)-(p-1)}$.

Langkah 6: Diagram kontrol T^2 adalah diagram yang diperoleh dengan memplot nilai UCL dan nilai T^2 .

Langkah 7: Jika diagram kontrol menunjukkan keadaan terkontrol, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya (mungkin dengan nilai n yang berbeda) dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika sebaliknya, maka perlu diselidiki apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, penyelidikan dilanjutkan untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC diikuti dengan upaya peningkatan kualitas proses.

Contoh 6.3.

Contoh ini adalah kelanjutan dari Contoh 6.2 yang memperlihatkan langkah-langkah Tahap 1 dalam upaya mengontrol capaian akademik mahasiswa pada semester pertama tahun pertama bersama di sebuah Perguruan Tinggi. Pada semester itu ada 8 matakuliah yang menjadi obyek pengontrolan, yakni A (Pancasila), B (Kewarganegaraan), C (Bahasa Inggris), D (Kalkulus), E (Algoritma), F (Praktikum C++), G (Teknik Informatik), dan H (Matematika Diskrit).

Pada Tahap 1 tersebut digunakan $m = 20$ kelas (sub-grup). Dan pada *Langkah 3* dan *Langkah 6* telah diperoleh $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} sebagai penaksir μ dan Σ ,

$$\bar{X}_{HDS} = \begin{pmatrix} 3,74 \\ 3,50 \\ 3,70 \\ 2,92 \\ 3,20 \\ 3,56 \\ 3,08 \\ 3,18 \end{pmatrix}$$

$$\text{dan } \bar{S}_{RDS} = \begin{pmatrix} 0,06117 & 0,00948 & 0,01143 & 0,09833 & 0,05176 & 0,04950 & 0,04470 & 0,08696 \\ 0,00948 & 0,19575 & 0,02840 & 0,15165 & 0,18705 & 0,11442 & 0,00609 & 0,15306 \\ 0,01143 & 0,02840 & 0,21606 & 0,07608 & 0,14321 & 0,13524 & 0,13378 & 0,11141 \\ 0,09833 & 0,15165 & 0,07608 & 0,98008 & 0,48464 & 0,30925 & 0,36486 & 0,51220 \\ 0,05176 & 0,18705 & 0,14321 & 0,48464 & 0,82181 & 0,41947 & 0,38086 & 0,54617 \\ 0,04950 & 0,11442 & 0,13524 & 0,30925 & 0,41947 & 0,55977 & 0,15517 & 0,42571 \\ 0,04470 & 0,00609 & 0,13378 & 0,36486 & 0,38086 & 0,15517 & 0,57931 & 0,25128 \\ 0,08696 & 0,15306 & 0,11141 & 0,51220 & 0,54617 & 0,42571 & 0,25128 & 0,74274 \end{pmatrix}$$

Nah, sekarang akan diperlihatkan kinerja proses belajar mengajar diukur dari capaian akademik rata-rata pada 9 kelas yang berbeda. Banyaknya mahasiswa di setiap kelas yang dikontrol disajikan pada Tabel 6.12.

Tabel 6.12. Data ukuran sub-grup (kelas)

No. Kelas	n
1	22
2	24
3	25
4	23
5	21
6	21
7	20
8	20
9	22

Langkah 1: Pengumpulan data sub-grup

Data yang dikumpulkan dari setiap kelas berupa matriks data yang terdiri atas 8 kolom (matakuliah) dengan banyak baris sesuai dengan banyaknya mahasiswa dalam kelas tersebut. Dalam bentuk tabel, matriks data itu sama seperti Tabel 6.6.

Di sini pun, kesembilan matriks data tidak disajikan secara lengkap. Hanya rata-rata kelas yang akan disajikan.

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata sub-grup

Hasil hitungan memberikan rata-rata kelas pada tabel berikut.

Tabel 6.13. Rata-rata kelas skor nilai semua matakuliah semua kelas

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3,70	3,42	3,67	2,78	3,12	3,43	3,06	3,04
2	3,63	3,30	3,61	2,64	2,80	3,16	3,09	2,79
3	3,61	3,54	3,67	2,69	3,04	3,36	2,85	2,87
4	3,54	3,32	3,71	2,66	3,01	3,49	2,95	2,98
5	3,64	3,41	3,55	2,75	3,07	3,56	2,84	3,18
6	3,67	3,38	3,70	2,59	3,03	3,37	3,03	2,99
7	3,60	3,36	3,54	2,31	2,53	3,10	2,52	2,69
8	3,81	3,51	3,97	3,69	3,85	4,00	3,39	3,87
9	3,50	3,50	3,60	2,50	3,30	3,50	2,90	3,20

Langkah 3: Memusatkan data; menghitung $(\bar{X}^k - \bar{X}_{HDS})$

Hasil pemusatan vektor rata-rata kelas $\bar{X}^k$ terhadap vektor rata-rata total $\bar{X}_{HDS}$ diberikan pada Tabel 6.14.

Tabel 6.14. Vektor rata-rata kelas terpusat terhadap $\bar{X}_{HDS}$

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-0,05	-0,08	-0,02	-0,14	-0,08	-0,13	-0,02	-0,14
2	-0,12	-0,20	-0,09	-0,28	-0,40	-0,40	0,01	-0,39
3	-0,13	0,05	-0,03	-0,23	-0,17	-0,20	-0,24	-0,31
4	-0,20	-0,17	0,01	-0,26	-0,19	-0,07	-0,13	-0,21
5	-0,10	-0,09	-0,14	-0,16	-0,13	-0,01	-0,25	0,00
6	-0,08	-0,11	0,01	-0,33	-0,17	-0,19	-0,06	-0,19
7	-0,14	-0,14	-0,16	-0,61	-0,67	-0,46	-0,56	-0,49
8	0,07	0,01	0,27	0,77	0,65	0,44	0,31	0,69
9	-0,24	0,00	-0,10	-0,42	0,10	-0,06	-0,18	0,02

Langkah 4: Menghitung T^2

Pertama, kita hitung hasil kali antara vektor $(\bar{X}^k - \bar{X}_{HDS})^t$ dan matriks dengan $\bar{S}_{HDS}^{-1}$ untuk $k = 1, 2, \dots, 9$. Hasilnya disajikan pada Tabel 6.15.

Tabel 6.15. Hasil perkalian $(\bar{X}^k - \bar{X}_{HDS})^t \bar{S}_{HDS}^{-1}$

Kelas	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-0,63057	-0,36429	0,02409	-0,02130	0,15127	-0,17424	-0,02128	-0,03297
2	-1,73241	-0,46371	-0,09362	0,06857	-0,33395	-0,40882	0,43194	0,06946
3	-1,71721	0,41770	0,25329	0,12370	0,15566	-0,21741	-0,33171	-0,29921
4	-3,73577	-1,14559	0,28552	0,19835	-0,02439	0,17180	-0,24594	0,22014
5	-2,11647	-0,80701	-0,56659	0,05999	-0,00743	0,19601	-0,42324	0,48807
6	-0,98492	-0,40459	0,24344	-0,22962	0,03782	-0,27655	0,04087	0,17946
7	-1,59458	-0,26124	0,14515	-0,04502	-0,33816	-0,42958	-0,63682	0,29493
8	-0,71388	-1,51520	1,13034	0,75241	0,61363	-0,21010	-0,71941	0,54686
9	-4,43672	-0,33142	-0,48277	-0,39970	0,45368	-0,22393	-0,20376	0,82430

Kedua, menghitung nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_9^2$ dengan cara yang sama seperti pada Bab 4 dan Bab 5. Hasilnya disajikan pada Tabel 6.16, kolom kedua.

Tabel 6.16. Nilai statistik T^2 dan UCL $_k$ pada Tahap II

k	T_k^2	UCL $_k$
1	1,59321	25,71409
2	12,81325	25,62804
3	9,46873	25,59054
4	19,41846	25,66905
5	9,38587	25,76379
6	4,15895	25,76379
7	17,22738	25,81892
8	24,45103	25,81892
9	29,53414	25,71409

Langkah 5: Menghitung UCL_k

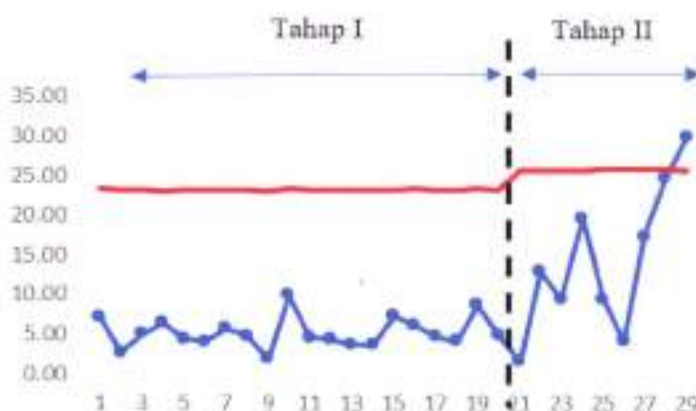
UCL untuk sub-grup ke- k adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F berderajat kebebasan $p = 8$ dan $m(n_k - 1) - (p - 1)$ yang harganya berubah-ubah tergantung n_k . Berbeda dengan Tahap I, di Tahap II faktor kelipatannya sebesar $L = \frac{p(m+1)(n_k-1)}{m(n_k-1)-(p-1)}$ yang nilainya juga tergantung n_k . Jadi, untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL_k = "L * F.INV(0.9973, 8, 20 * (n_k - 1) - (8 - 1))"$$

Hasil komputasi UCL_k disajikan pada Tabel 6.16, kolom ketiga.

Langkah 6: Membuat diagram kontrol T^2

Pada Gambar 6.3 ditampilkan sekaligus diagram kontrol T^2 pada Tahap I dilanjutkan dengan diagram yang sama pada Tahap II.



Gambar 6.3. Diagram kontrol T^2 pada Tahap I dan Tahap II untuk Contoh 6.1-6.2

Langkah 7: Proses berjalan aman?

Gambar di atas memperlihatkan bahwa capaian akademik mahasiswa di Kelas No. 9 pada Tahap II (nomor 29 pada sumbu mendatar) berbeda dengan 8 kelas sebelumnya. Dalam bahasa statistika, proses belajar mengajar di Kelas No. 9 menunjukkan kinerja yang berbeda dalam pengertian rata-rata skor nilai keseluruhan matakuliah.

Keadaan seperti itu jelas merupakan sinyal khususnya bagi manajemen Perguruan Tinggi dan umumnya bagi Dosen kedelapan matakuliah tentang adanya anomali dalam proses belajar mengajar. Oleh karena itu, mereka perlu duduk bersama mencari akar penyebab terjadinya OOC di Kelas No. 9 untuk kemudian membawa kelas tersebut ke keadaan yang lebih baik.

BAGIAN III

PENGONTROLAN

VARIABILITAS PROSES

- Bagian ini bertumpu pada dua jenis distribusi; distribusi Beta (Bab 7) dan distribusi Normal (Bab 8 – Bab 12)
- PFA diterapkan untuk satu sisi (one sided) tatkala distribusi Beta menjadi tumpuan dan dua sisi (two sided) tatkala bertumpu pada distribusi Normal
- Dalam praktik, $PFA = 0,0027$ biasa digunakan pada proses industri manufaktur dan $PFA = 0,05$ pada proses industri jasa

BAB 7

TEKNIK BERBASIS OBSERVASI INDIVIDUAL: STATISTIK W

Berikut adalah prosedur pengontrolan variabilitas proses (MPV) berbasis observasi individual dengan menggunakan statistik W . Pada mulanya statistik ini diperkenalkan oleh Wilks (1963) untuk mendeteksi dan menguji kehadiran satu *single* data pencilan (*one single outlier*) pada sekelompok data multivariat. Kemudian, peran statistik W tersebut dielaborasi lebih lanjut oleh Anderson (1966, 1984). Pada tahun 2010, Djauhari (2010) menggunakan statistik itu untuk teknik pengontrolan MPV berdasarkan observasi individual. Pembaca yang tertarik mempelajari lebih rinci tentang teknik ini, dipersilahkan membaca artikel tersebut.

Di dalam buku ini, penggunaan statistik W pada pengontrolan tersebut di atas akan ditampilkan secara lengkap mulai dari Tahap I sampai dengan Tahap II khusus untuk kasus di mana μ dan Σ tak diketahui. Artinya, μ dan Σ harus ditaksir terlebih dahulu sebelum memasuki Tahap II.

Catatan

Untuk kasus di mana μ dan Σ diketahui, masalah pengontrolan variabilitas proses berbasis observasi individual masih terbuka untuk diteliti dan dikembangkan.

Tahap I

Langkah-langkah Tahap I di sini persis sama dengan langkah-langkah Tahap I pada Bab 4, tentang pengontrolan MPT berbasis observasi individual di mana μ dan Σ tidak diketahui. Namun demikian, untuk memudahkan para pembaca, langkah-langkah itu akan dituliskan kembali di sini.

Langkah 1: Ambil m buah sampel acak yang saling bebas. Misalkan m sampel ini kita sebut $X^1, X^2, \dots, X^m$.

Langkah 2: Hitung $\bar{X}$ vektor rata-rata dari m sampel tersebut, yakni

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^k.$$

Langkah 3: Pusatkan data terhadap $\bar{X}$; artinya hitung $(X^k - \bar{X})$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 4: Hitung matriks kovariansi dari m sampel tersebut,

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (X^k - \bar{X})(X^k - \bar{X})^T.$$

Langkah 5: Hitung S^{-1} inversi dari matriks kovariansi S .

Langkah 6: Untuk sampel ke- k , hitung nilai statistik $T_k^2 = (X^k - \bar{X})^T S^{-1} (X^k - \bar{X})$; k bergerak dari 1 sampai dengan m .

- Langkah 7:* Hitung batas atas $UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha; m, v}$. Sekali lagi, $\beta_{\alpha; m, v}$ adalah kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $u = p/2$ dan $v = (m-p-1)/2$.
- Langkah 8:* Buatlah diagram kontrol T^2 dengan memplot nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ beserta nilai UCL pada satu diagram yang sama.
- Langkah 9:* Bila di antara $T_1^2, T_2^2, \dots, T_m^2$ ada yang nilainya melebihi UCL (berada di luar daerah kontrol), hitunglah $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yakni vektor rata-rata dan matriks kovariansi dari HDS. Bila tidak ada, vektor rata-rata $\bar{X}$ dan matriks kovariansi S yang dihasilkan pada *Langkah 2* dan *Langkah 4* untuk selanjutnya kita sebut $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} .
- Langkah 10:* Gunakanlah $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} sebagai nilai taksiran untuk μ dan Σ pada Tahap II.

Contoh 7.1.

Langkah-langkah pada contoh ini sama dengan yang ada pada Contoh 4.2 di Bab 4. Namun demikian, pada contoh ini akan digunakan data yang berbeda, yakni data yang berkaitan dengan pengontrolan MPV.

Langkah 1: Mengambil m buah sampel yang saling bebas

Data yang digunakan adalah data dari perusahaan farmasi di Bandung tentang pengontrolan variabilitas proses produksi tablet Paracetamol. CTQ nya terdiri atas dua variabel yakni "Ketebalan Tablet" (X dalam mm) dan "Kekerasan Tablet" (Y dalam kg/cm²). Jadi, $p = 2$. Sedangkan $m = 42$. Data selengkapnya ada di Tabel 16.2 yang diberikan di Bab 16.

Langkah 2: Menghitung $\bar{X}$ vektor rata-rata dari m sampel
Vektor rata-rata dari 42 sampel itu adalah,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 4,27202 \\ 7,77369 \end{pmatrix}.$$

Langkah 3: Memusatkan data terhadap $\bar{X}$

Pemusatan data pada Tabel 16.2 terhadap $\bar{X}$ menghasilkan tabel data terpusat berikut.

Tabel 7.1 Data terpusat

No.	X	Y	No.	X	Y
1	-0,005	-0,034	22	-0,172	0,063
2	-0,012	-0,029	23	0,408	-0,316
3	0,046	-0,214	24	0,128	-0,029
4	0,013	0,066	25	0,166	-0,033
5	0,042	-0,022	26	-0,772	0,176
6	0,010	-0,024	27	0,133	-0,334
7	0,026	0,076	28	0,158	-0,234
8	0,049	-0,034	29	-0,237	0,067
9	0,026	-0,028	30	-0,222	0,167
10	0,058	0,176	31	0,068	0,169
11	0,290	-0,134	32	0,140	0,076
12	-0,198	0,186	33	0,365	-0,031
13	-0,747	0,731	34	-0,242	0,066
14	0,086	-0,154	35	-0,249	0,176
15	0,086	0,060	36	0,128	0,066
16	0,218	-0,234	37	0,333	-0,034
17	0,047	-0,244	38	-0,267	0,186
18	0,013	-0,040	39	-0,260	0,156

19	0,178	-0,329	40	-0,250	0,147
20	-0,243	0,151	41	0,128	-0,339
21	0,443	-0,134	42	0,089	0,030

Langkah 4: Menghitung matriks kovariansi S dari m sampel

Data pada Tabel 16.2 selanjutnya memberikan,

$$S = \begin{pmatrix} 0,06487 & -0,03624 \\ -0,03624 & 0,03851 \end{pmatrix}.$$

Langkah 5: Menghitung S^{-1} inversi dari S

Hasil perhitungan memberikan,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 32,50761 & 30,59156 \\ 30,59156 & 54,75522 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Menghitung nilai statistik $T_k^2 = (X^k - \bar{X})^t S^{-1} (X^k - \bar{X})$

Pertama, kita hitung perkalian antara data terpusat $(X^k - \bar{X})$ pada *Langkah 3* dengan matriks S^{-1} pada *Langkah 5*. Hasilnya disajikan pada Tabel 7.2.

Tabel 7.2. Hasil perkalian $(X^k - \bar{X})$ dan S^{-1}

No.	X	Y	No.	X	Y
1	-1,19396	-1,99842	22	-3,65535	-1,79595
2	-1,26855	-1,93878	23	3,60487	-4,80507
3	-5,04255	-10,29418	24	3,28251	2,34404
4	2,51535	4,08894	25	4,39544	3,28750
5	0,70100	0,09645	26	-19,70307	-13,96355
6	-0,40043	-0,99199	27	-5,88537	-14,20335
7	3,17885	4,97300	28	-2,01353	-7,96303
8	0,56145	-0,34647	29	-5,64597	-3,56538
9	-0,00267	-0,72155	30	-2,09920	2,36901
10	7,27825	11,42745	31	7,38919	11,35008
11	5,33663	1,55057	32	6,88472	8,46043
12	-0,73778	4,14356	33	10,92563	9,48473
13	-1,91206	17,19039	34	-5,83910	-3,77309
14	-1,90675	-5,78521	35	-2,70159	2,03584
15	4,63984	5,93241	36	6,18871	7,54578
16	-0,06307	-6,12754	37	9,79362	8,34153
17	-5,92779	-11,90625	38	-2,98081	2,03274
18	-0,79237	-1,77630	39	-3,67100	0,60423
19	-4,26957	-12,55295	40	-3,62125	0,41735
20	-3,27133	0,85051	41	-6,20087	-14,63008
21	10,31030	6,23108	42	3,81962	4,38152

Kedua, menghitung nilai T^2 untuk setiap sampel. Caranya sama dengan yang dikemukakan pada Contoh 4.2 di Bab 4, Tahap 1, untuk kasus di mana μ dan Σ tidak diketahui. Semua nilai $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{42}^2$ disajikan pada Tabel 7.3, kolom kedua dan kelima.

Tabel 7.3. Nilai statistik T^2 dan UCL untuk setiap sampel

Sampel	T^2	UCL	Sampel	T^2	UCL
1	0,07333	10,24642	22	0,51511	10,24642
2	0,07088	10,24642	23	2,98762	10,24642
3	1,96793	10,24642	24	0,35283	10,24642
4	0,30881	10,24642	25	0,62207	10,24642
5	0,02733	10,24642	26	12,74933	10,24642
6	0,01951	10,24642	27	3,95691	10,24642
7	0,46206	10,24642	28	1,54280	10,24642
8	0,03917	10,24642	29	1,09825	10,24642
9	0,01991	10,24642	30	0,86243	10,24642
10	2,43673	10,24642	31	2,42396	10,24642
11	1,34020	10,24642	32	1,60931	10,24642
12	0,91808	10,24642	33	3,69651	10,24642
13	13,99985	10,24642	34	1,16301	10,24642
14	0,72520	10,24642	35	1,03170	10,24642
15	0,75670	10,24642	36	1,29237	10,24642
16	1,41820	10,24642	37	2,98001	10,24642
17	2,62297	10,24642	38	1,17467	10,24642
18	0,06022	10,24642	39	1,04899	10,24642
19	3,36615	10,24642	40	0,96688	10,24642
20	0,92370	10,24642	41	4,16150	10,24642
21	3,73418	10,24642	42	0,47266	10,24642

Langkah 7: Menghitung UCL

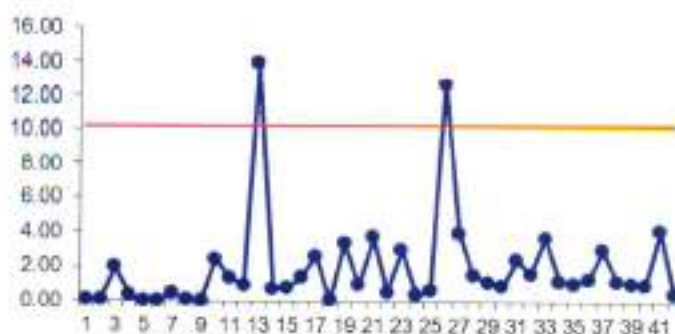
UCL adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $u = p/2$ dan $v = (m-p-1)/2$. Faktor kelipatannya sebesar $\frac{(m-1)^2}{m}$. Jadi, untuk PFA = 0,0027, $u = 1$ dan $v = 20$, dengan menggunakan MS Excel, kita peroleh,

$$UCL = \text{BETA.INV}(0,9973,1,20) * 41^2/42 = 10,24642.$$

Hasil hitungan ini ditampilkan pada Tabel 7.3 di atas, kolom ketiga dan keenam.

Langkah 8: Membuat diagram kontrol T^2

Diagram kontrol pada gambar berikut diperoleh dengan memplot nilai statistik T^2 dan UCL untuk setiap sampel yang ada di Tabel 7.3.



Gambar 7.1, Diagram kontrol T^2 pada Tahap I untuk Contoh 7.1

Pada gambar ini, garis lurus berwarna merah adalah UCL.

Langkah 9: Menentukan HDS

Gambar di atas memperlihatkan dua sampel yang berada di luar batas kontrol UCL yakni sampel No. 13 dan No. 26. Dengan demikian, HDS adalah kumpulan semua data yang digunakan pada Tahap I kecuali kedua sampel tersebut. Jadi, HDS terdiri atas $M = 40$ buah data.

Langkah 10: Menaksir nilai μ dan Σ ; $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS}

Sekarang kita hitung vektor rata-rata $\bar{X}_{HDS}$ dan matriks kovariansi S_{HDS} berdasarkan semua data dalam HDS . Dan, kita peroleh,

$$\bar{X}_{HDS} = \begin{pmatrix} 4,368 \\ 7,759 \end{pmatrix} \text{ dan } S_{HDS} = \begin{pmatrix} 0,00471 & -0,01972 \\ -0,01972 & 0,25446 \end{pmatrix}$$

yang merupakan taksiran dari μ dan Σ .

Tahap II

Setelah parameter μ dan Σ kita taksir nilainya dengan menggunakan $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} yang diperoleh pada Tahap I di atas, lalu kita buat diagram kontrol W dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan satu buah data tentang kedua CTQ. Lalu data ini digabungkan dengan HDS . Hasil gabungannya disebut himpunan gabungan data atau *augmented data set* disingkat ADS . Misalkan HDS terdiri atas M buah data. Maka ADS terdiri atas $(M+1)$ buah data.

Langkah 2: Hitung S_{ADS} yakni matriks kovariansi berdasarkan ADS ,

$$S_{ADS} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M+1} (X^k - \bar{X}_{ADS})(X^k - \bar{X}_{ADS})^t,$$

dengan $\bar{X}_{ADS} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=1}^{M+1} X^k$. Di sini, $X^1, X^2, \dots, X^M$ adalah HDS . Sedangkan $X^1, X^2, \dots, X^M, X^{M+1}$ adalah ADS .

Catatan: Cara menghitung S_{ADS} yang lebih cepat dan mudah (hanya melibatkan $\bar{X}_{HDS}$, S_{HDS} , dan X^{M+1}) adalah sebagai berikut,

$$S_{ADS} = \frac{M-1}{M} S_{HDS} + \frac{1}{M+1} (X^{M+1} - \bar{X}_{HDS})(X^{M+1} - \bar{X}_{HDS})^T.$$

Langkah 3: Hitung $|S_{HDS}|$; determinan matriks S_{HDS} .

Langkah 4: Hitung $|S_{ADS}|$; determinan matriks S_{ADS} .

Langkah 5: Hitung nilai statistik $W = \left(\frac{M-1}{M}\right)^P \frac{|S_{HDS}|}{|S_{ADS}|}$.

Langkah 6: Hitung $LCL = \beta_{1-\alpha; r, s}$ seperti yang dikemukakan Djauhari (2010). Di sini, $\beta_{1-\alpha; r, s}$ adalah kuantil ke- α dari distribusi Beta yang memiliki derajat kebebasan $r = (M-p)/2$ dan $s = p/2$.

Langkah 7: Buatlah diagram kontrol W dengan memplot nilai W , yang diperoleh pada *Langkah 5* di atas, bersama nilai LCL pada diagram yang sama.

Langkah 8: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya plot nilai W berada dalam daerah kontrol ($W > LCL$), lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai W berada di luar daerah kontrol, maka ini adalah sinyal alarm. Artinya, pada saat itu perlu dicek apakah sinyal tersebut berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses terus dijalankan dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Contoh 7.2.

Contoh ini melanjutkan Contoh 7.1 di atas. Dengan menggunakan $\bar{X}_{HDS}$ dan S_{HDS} sebagai taksiran untuk μ dan Σ , pada saat pengontrolan pertama dikumpulkan satu buah data tentang kedua CTQ. Data inilah yang kita sebut X^{M+1} .

Langkah 1: Mengumpulkan data

Saat pertama pengontrolan dilakukan, terkumpul data X^{M+1} (atau X^{41} , sebab $M = 40$) berikut,

$$X^{M+1} = \begin{pmatrix} 4,305 \\ 8,150 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Menghitung S_{ADS}

Dari Tahap 1 telah diperoleh,

$$\bar{X}_{HDS} = \begin{pmatrix} 4,368 \\ 7,759 \end{pmatrix} \text{ dan } S_{HDS} = \begin{pmatrix} 0,00471 & -0,01972 \\ -0,01972 & 0,25446 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian,

$$S_{ADS} = \frac{M-1}{M} S_{HDS} + \frac{1}{M+1} (X^{M+1} - \bar{X}_{HDS})(X^{M+1} - \bar{X}_{HDS})^t$$

$$= \begin{pmatrix} 0,00469 & -0,01982 \\ -0,01982 & 0,25183 \end{pmatrix}.$$

Langkah 3: Menghitung $|S_{HDS}|$; determinan matriks S_{HDS}

Determinan matriks S_{HDS} adalah,

$$|S_{HDS}| = 0,0008102.$$

Langkah 4: Menghitung $|S_{ADS}|$; determinan matriks S_{ADS}

Determinan matriks S_{ADS} adalah,

$$|S_{ADS}| = 0,0007881.$$

Langkah 5: Menghitung nilai statistik W

$$W = \left(\frac{M-1}{M} \right)^p \frac{|S_{HDS}|}{|S_{ADS}|} = \left(\frac{39}{40} \right)^2 \frac{0,0008102}{0,0007881} = 0,97730.$$

Langkah 6: Menghitung LCL

LCL adalah kuantil ke- α dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $r = (M-p)/2$ dan $s = p/2$. Untuk PFA = 0,0027, $r = 19$ dan $s = 1$, MS Excel memberikan,

$$LCL = "=BETAINV(0.0027,(40-2)/2,2/2)" = 0,73250.$$

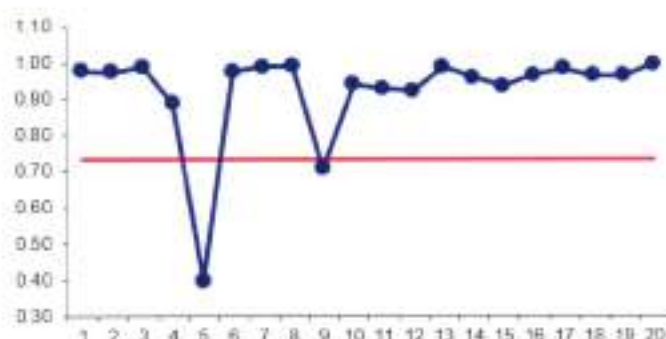
Langkah 7: Membuat diagram kontrol W

Diagram kontrol W pada Gambar 7.2 yang ada di bawah menunjukkan kinerja proses produksi ditinjau dari segi variabilitasnya selama 20 kali pengontrolan. Data dari 20 kali observasi ditampilkan pada Tabel 16.3 di Bab 16. Sedangkan hasil perhitungan statistik W dan LCL untuk setiap observasi disajikan pada Tabel 7.4.

Tabel 7.4. Nilai statistik W dan LCL

Obs	W	LCL	Obs	W	LCL
1	0,97730	0,7325	11	0,92837	0,7325
2	0,97394	0,7325	12	0,92212	0,7325
3	0,98860	0,7325	13	0,98893	0,7325
4	0,88673	0,7325	14	0,95909	0,7325
5	0,39747	0,7325	15	0,93645	0,7325
6	0,97524	0,7325	16	0,96674	0,7325
7	0,98861	0,7325	17	0,98453	0,7325
8	0,99063	0,7325	18	0,96384	0,7325
9	0,70696	0,7325	19	0,96388	0,7325
10	0,94052	0,7325	20	0,99652	0,7325

Apabila data nilai W dan nilai LCL pada tabel ini kita plot pada satu diagram, maka kita peroleh gambar berikut.



Gambar 7.2. Diagram kontrol W pada Tahap II untuk Contoh 7.2

Pada gambar ini, garis lurus berwarna merah adalah LCL.

Langkah 8: Proses aman?

Gambar di atas memberi sinyal/alarm bahwa pada saat pengontrolan kelima dan kesembilan, proses mengalami keadaan tak terkontrol (*out-of-control* disingkat OOC). Sinyal ini menuntut tindakan penyelidikan lebih lanjut tentang apa yang terjadi untuk kemudian, jika diperlukan, membawa proses kembali dalam keadaan OOC.

BAB 8

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP

BERUKURAN KONSTAN: STATISTIK GV

Bab ini menjelaskan langkah-langkah pengontrolan MPV berdasarkan skenario sampling kedua, yakni pengontrolan berbasis sub-grup yang berukuran konstan, dengan menggunakan statistik pengontrol GV (*generalized variance*). Ada dua versi diagram kontrol GV yang akan dibahas. *Pertama*, diagram kontrol GV yang klasik di mana batas-batas kontrol bersifat bias. Versi ini dapat dijumpai dalam berbagai literatur tentang SPC yang menjadi pegangan para manajer kualitas (*Quality Managers*) seperti buku Montgomery (2001, 2005, 2009, 2019), Jaupi (2002), Mason dkk (2009), Ryan (2011). *Kedua*, diagram kontrol GV versi baru yang memberikan batas-batas kontrol tak bias. Versi ini diperkenalkan pertama kali dalam artikel penulis; Djauhari (2005) berjudul “*Improved Monitoring of Multivariate Process Variability*” yang terbit di *Journal of Quality Technology*, USA, 2005. Jurnal ini adalah jurnal yang paling bergengsi (*prestigious*) di seluruh dunia dalam bidang *Quality Science & Technology*.

Bagi para pembaca yang ingin mempelajari secara lebih mendalam kedua versi diagram kontrol GV , dipersilahkan membaca literatur-literatur tersebut di atas. Jangan lewatkan pula untuk membaca Djauhari, dkk. (2016) yang menyajikan teknik untuk sub-grup berukuran kecil, dan juga Djauhari (2017) yang menawarkan solusi untuk mengatasi kelemahan teknik berbasis GV . Berikut adalah langkah-langkah pembuatan diagram kontrol GV versi klasik.

1. Diagram kontrol GV Versi Klasik

Diagram kontrol GV versi klasik dapat dilihat dalam berbagai literatur antara lain dalam buku dan artikel yang sudah disebutkan di atas. Langkah-langkah pembuatan diagram tersebut adalah sebagai berikut.

Tahap 1

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup masing-masing berukuran n yang saling bebas. Setiap sub-grup berupa matriks data berukuran $(n \times p)$ dengan n banyaknya unit sampel dan p banyaknya variabel (CTQ). Matriks data untuk sub-grup ke- k berbentuk sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^k & \cdots & x_{np}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Hitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^m$ sebagai berikut,

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^k.$$

Langkah 5: Hitung $|\bar{S}|$ dan $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ yakni determinan dari matriks-matriks $\bar{S}$ dan $S^1, S^2, \dots, S^m$.

Langkah 6: Hitung konstanta $b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k)$.

Langkah 7: Hitung konstanta $b_2 = b_1(B - b_1)$ dengan,

$$B = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k+2).$$

Langkah 8: Hitung batas atas UCL = $\frac{|\bar{S}|}{b_1} (b_1 + 3\sqrt{b_2})$. UCL ini bersesuaian dengan PFA = 0,0027.

Langkah 9: Buatlah diagram kontrol GV dengan memplot nilai statistik $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ bersama nilai UCL pada satu diagram.

Langkah 10: Bila ada nilai statistik yang berada di luar daerah kontrol, artinya melebihi UCL, hitunglah $\bar{S}_{HDS}$ yakni rata-rata dari semua matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol. Jika banyaknya matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol tersebut kita sebut M , maka $M < m$. Bila semua nilai $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ lebih kecil dari UCL, dalam hal ini $M = m$, maka kita gunakan $\bar{S}$ yang dihasilkan pada Langkah 4 sebagai $\bar{S}_{HDS}$.

Contoh 8.1.

Kualitas serat tekstil ditentukan oleh 2 buah CTQ yakni (1) "Kekuatan Tegangan" X (dalam *pounds per square inch* disingkat PSI), dan (2) "Diameter" serat Y (dalam *Inch*). Jadi, $p = 2$, dan proses produksi serat tekstil dimonitor kualitasnya secara reguler berdasarkan kedua CTQ tersebut.

Langkah 1: Pengumpulan data m buah sub-grup berukuran n yang saling bebas

Untuk membangun sistem pengontrolan dari mulai Tahap I sampai dengan Tahap II digunakan ukuran sub-grup $n = 10$. Sedangkan, khusus untuk keperluan di Tahap I, digunakan banyaknya sub-grup $m = 20$. Data yang digunakan pada contoh ini dipinjam dari Montgomery (2001), Tabel 10.1, halaman 519, yang menampilkan data rata-rata setiap sub-grup.

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata

Tabel 8.1 menyajikan data rata-rata setiap sub-grup dicuplik dari Montgomery (2001).

Tabel 8.1. Rata-rata setiap sub-grup

Sub-grup	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	Sub-grup	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
1	115,25	1,04	11	115,75	0,99
2	115,91	1,06	12	114,90	1,06
3	115,05	1,09	13	116,01	1,05
4	116,21	1,05	14	115,83	1,07
5	115,90	1,07	15	115,29	1,11
6	115,55	1,06	16	115,63	1,04
7	114,98	1,05	17	115,47	1,03
8	115,23	1,10	18	115,58	1,05
9	116,15	1,09	19	115,72	1,06
10	115,92	1,05	20	115,40	1,04

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Hasil perhitungan Montgomery (2001) memberikan matriks kovariansi untuk setiap sub-grup yang disajikan pada Tabel 8.2.

Tabel 8.2. Matriks kovariansi setiap sub-grup

Sub-grup	Matriks kovariansi		Sub-grup	Matriks kovariansi	
1	1,25	0,80	11	1,45	0,78
	0,80	0,87		0,78	0,79
2	1,26	0,81	12	1,24	0,81
	0,81	0,85		0,81	0,82
3	1,30	0,82	13	1,26	0,72
	0,82	0,90		0,72	0,55
4	1,02	0,81	14	1,17	0,75
	0,81	0,85		0,75	0,76
5	1,16	0,80	15	1,23	0,82
	0,80	0,73		0,82	0,89
6	1,01	0,76	16	1,24	0,83
	0,76	0,80		0,83	0,91
7	1,25	0,75	17	1,20	0,70
	0,75	0,78		0,70	0,95
8	1,40	0,80	18	1,18	0,79
	0,80	0,83		0,79	0,83
9	1,19	0,83	19	1,31	0,76
	0,83	0,87		0,76	0,89
10	1,17	0,95	20	1,29	0,68
	0,95	0,86		0,68	0,85

Pada tabel ini, matriks kovariansi sub-grup pertama ada pada baris pertama dan kedua, kolom kedua dan ketiga, yakni;

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,80 \\ 0,80 & 0,87 \end{pmatrix}$$

Secara analog, lihat dua baris terakhir pada dua kolom terakhir,

$$S^{20} = \begin{pmatrix} 1,29 & 0,68 \\ 0,68 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Menghitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^m$

Matriks rata-rata $\bar{S}$ dari $S^1, S^2, \dots, S^m$ adalah,

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix}$$

Langkah 5: Hitung determinan dari matriks-matriks $\bar{S}$ dan $S^1, S^2, \dots, S^m$

Determinan dari matriks $\bar{S}$ adalah $|\bar{S}| = 0,3968$. Sedangkan determinan dari matriks-matriks $S^1, S^2, \dots, S^{20}$ adalah $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^{20}|$, disajikan di kolom *GV* pada tabel berikut.

Tabel 8.3. Nilai *GV* dan UCL untuk setiap sub-grup

Sub-grup (<i>k</i>)	GV	UCL	Sub-grup (<i>k</i>)	GV	UCL
1	0,4475	1,2616	11	0,5371	1,2616
2	0,4149	1,2616	12	0,3607	1,2616
3	0,4976	1,2616	13	0,1746	1,2616
4	0,2109	1,2616	14	0,3267	1,2616
5	0,2068	1,2616	15	0,4223	1,2616
6	0,2304	1,2616	16	0,4395	1,2616
7	0,4125	1,2616	17	0,6500	1,2616
8	0,5220	1,2616	18	0,3553	1,2616
9	0,3464	1,2616	19	0,5883	1,2616
10	0,1037	1,2616	20	0,6341	1,2616

Langkah 6: Menghitung konstanta b_1

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k) = \frac{1}{(9)^2} \prod_{k=1}^2 (10-k) = \frac{1}{81} * 9 * 8 = 0,888889.$$

Langkah 7: Menghitung konstanta b_2

$$b_2 = b_1(B - b_1) \text{ dengan } B = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k+2) = \frac{1}{81} * 11 * 10 = 1,3580. \text{ Jadi,}$$

$$b_2 = b_1(B - b_1) = 0,888889(1,3580 - 0,888889) = 0,41701.$$

Langkah 8: Menghitung batas atas UCL

$$UCL = \frac{|\bar{S}|}{b_1} (b_1 + 3\sqrt{b_2}) = \frac{0,3968}{0,888889} (0,888889 + 3\sqrt{0,41701}) = 1,2616.$$

Langkah 9: Membuat diagram kontrol GV

Data GV dan nilai UCL setiap sub-grup pada Tabel 8.3 memberikan diagram kontrol GV yang terpampang pada gambar berikut.



Gambar 8.1. Diagram kontrol GV versi klasik Tahap I untuk Contoh 8.1

Langkah 10: Menentukan HDS

Gambar 8.1 memperlihatkan keadaan proses yang berjalan dengan baik (*in-control*). Ini berarti kedua puluh sub-grup merupakan HDS dengan $M = m = 20$. Oleh karena itu, $\bar{S}_{HDS} = \bar{S}$ yang diperoleh pada Langkah 4. Jadi,

$$\bar{S}_{HDS} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix} \text{ dan } |\bar{S}_{HDS}| = 0,3968.$$

Tahap II

Sekali lagi, di akhir Tahap I ada M buah matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol. Artinya, ada M buah sub-grup yang berada di dalam daerah kontrol. Nah, matriks $\bar{S}_{HDS}$ diperoleh dari M buah sub-grup tersebut. Matriks ini diperlukan untuk menentukan UCL pada Tahap II berikut.

Tahap I telah memberikan $M = m = 20$ dan

$$\bar{S}_{HDS} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix} \text{ dengan } |\bar{S}_{HDS}| = 0,3968.$$

Berbekal informasi ini, sekarang kita siap melaksanakan langkah-langkah Tahap II.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dalam bentuk matriks seperti pada Tahap I, *Langkah 1*, yakni sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data pada kolom (variabel) ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansinya,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung $|S|$; determinan matriks S .

Langkah 5: Hitung $UCL = \frac{|S_{HPS}|}{b_1} (b_1 + 3\sqrt{b_2})$ dengan b_1 dan b_2 yang diperoleh di Tahap I,

Langkah 6 dan Langkah 7.

Langkah 6: Buatlah diagram kontrol GV dengan memplot nilai $|S|$ yang diperoleh pada *Langkah 4* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 7: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $|S| < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai $|S|$ berada di luar daerah kontrol, maka ini adalah sinyal/alarm yang menandakan proses berada dalam keadaan OOC. Pada saat itu perlu dicek apakah sinyal tersebut berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses terus dijalankan dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Contoh 8.2.

Contoh ini adalah lanjutan dari Contoh 8.1 di atas. Apabila Contoh 8.1 mengemukakan langkah-langkah Tahap I pada pengontrolan proses produksi serat tekstil dengan menggunakan data Montgomery (2001), contoh ini berbicara tentang langkah-langkah Tahap II dengan menggunakan data simulasi.

Karena matriks kovariansi sub-grup merupakan masalah inti dalam pembuatan diagram kontrol, maka untuk memberikan ilustrasi bagaimana implementasi dari Tahap II, dilakukan kajian simulasi yang bertujuan menghasilkan matriks tersebut. Jadi, pada contoh ini *Langkah 1* dan *Langkah 2* dilewati untuk kemudian langsung ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Kajian simulasi dilakukan untuk menghasilkan 10 buah matriks kovariansi yang sesuai dengan proses produksi serat tekstil yang ada di Montgomery (2001). Kesepuluh matriks tersebut kemudian digunakan pada Tahap II. Hasil simulasi diberikan pada Tabel 8.4 berikut.

Tabel 8.4. Sepuluh buah matriks kovariansi hasil simulasi

Sub-grup	Matriks kovariansi		Sub-grup	Matriks kovariansi	
1	1,34	0,68	6	1,29	0,76
	0,68	0,85		0,76	0,89
2	2,37	1,76	7	1,52	0,55
	1,76	1,72		0,55	0,92
3	1,26	0,78	8	1,57	0,59
	0,78	0,87		0,59	0,95
4	1,12	0,56	9	1,48	0,46
	0,56	0,88		0,46	0,97
5	1,61	0,64	10	1,39	0,64
	0,64	0,67		0,64	0,83

Matriks kovariansi yang tertera pada baris pertama dan kedua, kolom kedua dan ketiga, yakni,

$$S = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,68 \\ 0,68 & 0,85 \end{pmatrix}$$

adalah matriks kovariansi hasil simulasi yang akan digunakan pada saat pertama kali melakukan pengontrolan.

Langkah 4: Menghitung determinan matriks S

Determinan matriks S pada saat pertama kali pengontrolan adalah $GV = |S| = 0,6766$. Sedangkan GV dari kesepuluh matriks pada Tabel 8.4 diberikan pada Tabel 8.5.

Tabel 8.5. GV kesepuluh matriks kovariansi hasil simulasi dan UCL

Sub-grup	GV	UCL
1	0,6766	1,2616
2	0,9788	1,2616
3	0,4878	1,2616
4	0,6720	1,2616
5	0,6691	1,2616
6	0,5705	1,2616
7	1,0959	1,2616
8	1,1434	1,2616
9	1,2240	1,2616
10	0,7441	1,2616

Langkah 5: Menghitung UCL

Karena diagram kontrol pada Tahap I berada dalam keadaan terkontrol, artinya $\bar{S}_{HDS} = \bar{S}$, maka UCL pada Tahap II ini sama dengan UCL pada Tahap I, yakni $UCL = 1,2616$ seperti tertera pada Tabel 8.5 kolom terakhir.

Langkah 6: Membuat diagram kontrol GV

Dengan memplot data pada Tabel 8.5, kita peroleh diagram kontrol GV pada gambar berikut.



Gambar 8.2. Diagram kontrol GV versi klasik Tahap II untuk Contoh 8.2

Langkah 7: Proses aman?

Gambar 8.2 menunjukkan bahwa, menurut diagram kontrol GV versi klasik, proses berjalan aman dan terkontrol, dan boleh terus dilanjutkan.

Contoh 8.3.

Pusat industri TNI Angkatan Darat (PT. PINDAD) yang berada di kota Bandung mengkaji stabilitas dari proses produksi *flange* (isolator kabel listrik tegangan tinggi). Untuk itu, sebuah analisis awal dilakukan pada Tahap I dengan menggunakan $m = 20$ sub-grup, masing-masing berukuran $n = 5$ dengan $p = 3$ CTQ. Ukuran sampel $n = 5$ biasa dilakukan dalam MVSPC seperti dicontohkan oleh Montgomery (2001). Ketiga karakteristik kualitas tersebut adalah X (Diameter Lubang/*nozzle*), Y (Ketebalan Dinding Isolator), dan Z (Ketebalan Dasar Isolator).

Observasi terhadap ketiga CTQ menghasilkan 20 buah matriks kovariansi yang terpampang pada Tabel 8.6. Mengingat bahwa matriks kovariansi bersifat simetris (bagian atas diagonal sama dengan bagian bawahnya, $s_{ij} = s_{ji}$), pada tabel tersebut hanya disajikan matriks segitiga bawahnya saja.

Table 8.6. Matriks kovariansi 20 sub-grup pada Tahap I

Sub-grup	S^k			Sub-grup	S^k		
1	0,0680			11	0,0150		
	-0,0260	0,0145			0,0156	0,0870	
	-0,0356	-0,0076	0,1445		-0,0605	-0,0944	0,2669
	0,0020				0,0150		
2	0,0014	0,0048		12	0,0069	0,0713	
	-0,0069	0,0040	0,1195		-0,0500	-0,0566	0,1989
	1,3568				0,1058		
3	-0,1143	0,0130		13	-0,0540	0,0805	
	0,1970	-0,0158	0,0403		-0,0815	0,0363	0,1048
	0,2655				0,0805		
4	0,0886	0,0483		14	0,0479	0,0389	
	0,2814	0,0832	0,3197		-0,0708	-0,0798	0,2331
	0,0508				0,0300		
5	0,0024	0,0764		15	-0,0069	0,0179	
	0,0471	0,0146	0,0745		0,0783	-0,0146	0,2107
	0,5788				3,5868		
6	0,0369	0,0183		16	0,4610	0,1542	
	-0,6935	-0,0787	1,0467		-0,3907	-0,0686	0,0679
	0,1030				0,0343		
7	0,0003	0,0233		17	0,0136	0,0274	
	0,0020	0,0428	0,1208		-0,0469	-0,0528	0,1189
	0,1630				0,0163		
8	0,0286	0,0433		18	-0,0119	0,0323	
	-0,2100	-0,0171	0,3442		-0,0115	0,0270	0,0587
	0,1920				0,0293		
9	0,0108	0,0292		19	0,0163	0,0129	
	-0,1290	-0,0100	0,2252		-0,0010	0,0065	0,0319
	0,2725				0,3888		
10	0,0994	0,1050		20	0,0206	0,0089	
	-0,1340	-0,0738	0,1169		-0,1938	-0,0170	0,1034

Elemen-elemen pada baris pertama sampai dengan ketiga dan kolom kedua sampai dengan keempat adalah matriks kovariansi sub-grup pertama yakni,

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0,0680 & -0,0260 & -0,0356 \\ -0,0260 & 0,0145 & -0,0076 \\ -0,0356 & -0,0076 & 0,1445 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Menghitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^{20}$

Matriks rata-rata dari kedua puluh matriks kovariansi pada Tabel 8.6 adalah,

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0,3677 & 0,0319 & -0,0755 \\ 0,0319 & 0,0454 & -0,0186 \\ -0,0755 & -0,0186 & 0,1974 \end{pmatrix}.$$

Langkah 5: Menghitung determinan dari matriks-matriks $\bar{S}$ dan $S^1, S^2, \dots, S^{20}$

Determinan dari matriks $\bar{S}$ adalah $|\bar{S}| = 0,0028$. Sedangkan determinan dari $S^1, S^2, \dots, S^{20}$ yakni $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^{20}|$, dapat dilihat di kolom *GV* pada tabel berikut.

Tabel 8.7. Nilai GV dan UCL untuk setiap sub-grup

Sub-grup	GV	UCL	Sub-grup	GV	UCL
1	8,57E-06	0,0196	11	9,51E-06	0,0196
2	5,87E-07	0,0196	12	1,59E-05	0,0196
3	5,28E-05	0,0196	13	2,32E-04	0,0196
4	7,59E-05	0,0196	14	2,87E-05	0,0196
5	1,11E-04	0,0196	15	2,90E-06	0,0196
6	1,30E-03	0,0196	16	7,43E-03	0,0196
7	1,01E-04	0,0196	17	1,21E-06	0,0196
8	3,96E-04	0,0196	18	1,38E-05	0,0196
9	7,59E-04	0,0196	19	2,15E-06	0,0196
10	7,87E-04	0,0196	20	3,14E-06	0,0196

Langkah 6: Menghitung konstanta b_1

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^2} \prod_{k=1}^n (n-k) = \frac{1}{(4)^2} \prod_{k=1}^5 (5-k) = 0,3750.$$

Langkah 7: Menghitung konstanta b_2

$$b_2 = b_1(B - b_1) \text{ dengan } B = \frac{1}{(4)^3} \prod_{k=1}^3 (n-k+2) = \frac{1}{64} * 6 * 5 * 4 = 1,875. \text{ Jadi,}$$

$$b_2 = b_1(B - b_1) = 0,3750(1,875 - 0,3750) = 0,5625.$$

Langkah 8: Menghitung UCL

$$UCL = \frac{|S|}{b_1} (b_1 + 3\sqrt{b_2}) = \frac{0,0020}{0,3750} (0,3750 + 3\sqrt{0,5625}) = 0,0196 \text{ seperti tampak pada Tabel 8.7 kolom ketiga dan terakhir.}$$

Langkah 9: Membuat diagram kontrol GV

Gambar 8.3 di bawah ini menyajikan diagram kontrol GV pada Tahap I proses produksi *flange* di PT PINDAD.

Gambar 8.3. Diagram kontrol GV versi klasik pada Tahap I untuk Contoh 8.3

Langkah 10: Menentukan HDS

Gambar 8.3 menunjukkan bahwa proses berada dalam keadaan terkontrol. Dengan demikian, berdasarkan diagram kontrol GV versi klasik, kedua puluh sub-grup merupakan HDS dengan $M = m = 20$. Oleh karena itu, $\bar{S}_{HDS} = \bar{S}$. Hasil Tahap I inilah yang digunakan untuk mengontrol variabilitas proses produksi *flange* di PT PINDAD.

2. Diagram GV Versi Baru

Diagram kontrol GV versi baru, sesuai dengan istilah dalam Djauhari (2005), dinamakan diagram kontrol IGV (*Improved Generalized Variance*). Sekali lagi, keunggulan diagram kontrol versi baru ini, dibandingkan dengan versi klasik terletak pada batas-batas kontrol. Versi baru memberikan batas-batas kontrol yang tak bias. Tidak demikian halnya dengan versi klasik. Langkah-langkah pembuatan diagram kontrol IGV pada Tahap I dan Tahap II adalah sebagai berikut.

Tahap I

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup masing-masing berukuran n yang saling bebas. Setiap sub-grup berupa matriks data berukuran $(n \times p)$ dengan n banyaknya unit sampel dan p banyaknya variabel (CTQ). Matriks data untuk sub-grup ke- k berbentuk sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \dots & x_{1p}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^k & \dots & x_{np}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Hitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^m$ sebagai berikut,

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^k,$$

Langkah 5: Hitung $|\bar{S}|$ dan $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ yakni determinan dari matriks-matriks $\bar{S}$ dan $S^1, S^2, \dots, S^m$.

Langkah 6: Hitung konstanta $b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k)$.

Langkah 7: Hitung konstanta $b_2 = b_1(A - b_1)$ dengan,

$$A = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n-k+2).$$

Langkah 8: Hitung konstanta $b_3 = \frac{1}{(N-m)^p} \prod_{k=1}^p [(N-m)-k+1]$, dengan $N = nm$, jumlah total unit sampel semua sub-grup di awal Tahap I.

Langkah 9: Hitung konstanta $b_4 = b_3(B - b_3)$ dengan,

$$B = \left(\frac{1}{(N-m)^p} \right) \prod_{k=1}^p [(N-m)-k+3].$$

Langkah 10: Hitung $UCL = |\bar{S}| \left(\frac{b_1}{b_3} + 3 \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right)$ seperti yang dikemukakan Djauhari (2005).
UCL ini bersesuaian dengan $PFA = 0,0027$.

Langkah 11: Buatlah diagram kontrol *IGV* dengan memplot nilai statistik $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ bersama nilai UCL pada satu diagram.

Langkah 12: Bila ada nilai statistik yang berada di luar daerah kontrol, artinya melebihi UCL, hitunglah $\bar{S}_{HDS}$ yakni rata-rata dari semua matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol. Jika banyaknya matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol tersebut kita sebut M , maka $M < m$. Bila semua nilai statistik $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ lebih kecil dari UCL, dalam hal ini $M = m$. Maka, matriks $\bar{S}$ yang dihasilkan pada *Langkah 4* untuk selanjutnya kita gunakan sebagai $\bar{S}_{HDS}$.

Catatan:

Langkah 1 sampai dengan *Langkah 7* pada Tahap I pembuatan diagram kontrol *IGV* di atas, sama persis dengan *Langkah 1* sampai dengan *Langkah 7* pada Tahap I pembuatan diagram kontrol *GV* versi klasik.

Contoh 8.4.

Untuk menunjukkan keunggulan diagram kontrol *IGV* dibandingkan dengan diagram kontrol *GV* versi klasik, pada contoh ini juga akan digunakan data serat tekstil pada Contoh 8.1. Dan, mengingat catatan di atas, langkah-langkahnya kita mulai dengan *Langkah 8*.

Langkah 8: Menghitung konstanta b_3

$$b_3 = \frac{1}{(N-m)^p} \prod_{k=1}^p \{(N-m) - k + 1\} = \frac{1}{(20 \times 9)^2} (20 \times 9)(20 \times 9 - 1) = 0,99444.$$

Langkah 9: Menghitung konstanta b_4

$$b_4 = b_3(C - b_3) \text{ dengan } C = \left(\frac{1}{(N-m)^p} \right) \prod_{k=1}^p \{(N-m) - k + 3\}.$$

$$C = \left(\frac{1}{(20 \times 9)^2} \right) (20 \times 9 + 2)(20 \times 9 + 1) = 1,01673.$$

$$b_4 = 0,99444(1,01673 - 0,99444) = 0,02216.$$

Langkah 10: Menghitung UCL

$$UCL = |\bar{S}| \left(\frac{b_1}{b_3} + 3 \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right). \text{ Sedangkan, nilai-nilai } b_1, b_2, \text{ dan } |\bar{S}| \text{ telah kita peroleh pada}$$

Contoh 8.1 (Tahap I takala membuat diagram kontrol GV versi klasik tersebut di atas). Nilai-nilai tersebut adalah $b_1 = 0,888889$, $b_2 = 0,41701$, dan $|\bar{S}| = 0,3968$. Oleh karena itu,

$$UCL = 0,3968 \left(\frac{0,888889}{0,99444} + 3 \sqrt{\frac{0,41701}{0,99444^2 + 0,02216}} \right) = 1,1192.$$

Nilai UCL pada setiap sub-grup ditampilkan pada Tabel 8.8 berikut, bersama dengan nilai GV yang telah disajikan pada Tabel 8.3.

Tabel 8.8. Nilai GV dan UCL untuk setiap sub-grup pada Tahap I

Sub-grup (k)	GV	UCL	Sub-grup (k)	GV	UCL
1	0,4475	1,1192	11	0,5371	1,1192
2	0,4149	1,1192	12	0,3607	1,1192
3	0,4976	1,1192	13	0,1746	1,1192
4	0,2109	1,1192	14	0,3267	1,1192
5	0,2068	1,1192	15	0,4223	1,1192
6	0,2304	1,1192	16	0,4395	1,1192
7	0,4125	1,1192	17	0,6500	1,1192
8	0,5220	1,1192	18	0,3553	1,1192
9	0,3464	1,1192	19	0,5883	1,1192
10	0,1037	1,1192	20	0,6341	1,1192

Langkah 11: Membuat diagram kontrol IGV

Data nilai GV dan nilai UCL di Tabel 8.8 memberikan diagram kontrol berikut.



Gambar 8.4. Diagram kontrol *IGV* Tahap I untuk Contoh 8.4

Langkah 12: Menentukan *HDS*

Diagram kontrol pada Gambar 8.4 ini pun menunjukkan bahwa variabilitas proses berada dalam keadaan terkontrol yang berarti kedua puluh sub-grup yang digunakan pada Tahap I merupakan *HDS*. Hanya saja perlu dicatat bahwa nilai UCL pada diagram ini bersifat tak bias dan nilainya lebih kecil dari UCL pada diagram kontrol *GV* versi klasik.

Catatan:

UCL yang didapat di *Langkah 10* bersifat tak bias. Inilah kelebihan dari diagram kontrol *IGV* (*GV* versi baru) dibandingkan dengan UCL pada diagram kontrol *GV* versi klasik.

Tahap II

Sekali lagi, di akhir Tahap I ada M buah matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol. Artinya, ada M buah sub-grup yang berada di dalam daerah kontrol. Nah, matriks $\bar{S}_{HDS}$ adalah rata-rata M buah matriks kovariansi sub-grup tersebut. Matriks ini diperlukan untuk menentukan UCL pada Tahap II berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dalam bentuk matriks seperti pada Tahap I, *Langkah 1*, yakni sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data pada kolom (variabel) ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansi,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung $|S|$; determinan matriks S .

Langkah 5: Jika $M = m$, langsung ke *Langkah 8* untuk menghitung UCL dengan menggunakan b_1 , b_2 , b_3 , dan b_4 yang diperoleh di Tahap 1. Jika $M < m$, mulailah dengan *Langkah 6* dan *Langkah 7* untuk memperbaharui b_3 dan b_4 .

Langkah 6: Hitung $b_3 = \frac{1}{(N^* - M)^p} \prod_{k=1}^p \{(N^* - M) - k + 1\}$, dengan $N^* = Mn$; jumlah total unit sampel semua sub-grup di akhir Tahap 1.

Langkah 7: Hitung konstanta $b_4 = b_3 (B - b_3)$ dengan,

$$B = \frac{1}{(N^* - M)^p} \prod_{k=1}^p \{(N^* - M) - k + 3\}.$$

Langkah 8: Hitung $UCL = |S_{HDS}| \left(\frac{b_1}{b_3} + 3 \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right)$ dengan b_1 dan b_2 yang diperoleh di Tahap 1, *Langkah 6* dan *Langkah 7*.

Langkah 9: Buatlah diagram kontrol *IGV* dengan memplot nilai $|S|$ yang diperoleh pada *Langkah 4* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 10: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $|S| < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai $|S|$ berada di luar daerah kontrol, maka ini adalah sinyal/alarm yang menandakan proses berada dalam keadaan OOC. Pada saat itu perlu dicek apakah sinyal tersebut berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Contoh 8.5.

Data pada Contoh 8.1 dan Contoh 8.2 yang dianalisis dengan menggunakan diagram kontrol *GV* versi klasik akan dianalisis lagi dengan menggunakan diagram kontrol *IGV*. Tujuannya untuk melihat keunggulan diagram kontrol *IGV*. Pada Tahap 1 kita peroleh bahwa, diagram kontrol *IGV* memberikan *HDS* yang terdiri atas semua data yang digunakan. Artinya, *HDS* terdiri atas $M = m = 20$ sub-grup. Oleh karena itu, kita langsung ke *Langkah 8*.

Langkah 8: Menghitung UCL

UCL pada diagram kontrol *IGV* di Tahap II ini sama dengan UCL di Tahap I yang disajikan pada Tabel 8.8. Untuk memudahkan para pembaca, nilai *GV* pada Tabel 8.5 dan nilai UCL pada Tabel 8.8 untuk setiap sub-grup kita tuliskan kembali pada Tabel 8.9 berikut.

Tabel 8.9. *GV* dan UCL untuk setiap sub-grup pada Tahap II

Sub-grup (<i>k</i>)	<i>GV</i>	UCL
1	0,6766	1,1192
2	0,9788	1,1192
3	0,4878	1,1192
4	0,6720	1,1192
5	0,6691	1,1192
6	0,5705	1,1192
7	1,0959	1,1192
8	1,1434	1,1192
9	1,2240	1,1192
10	0,7441	1,1192

Langkah 9: Membuat diagram kontrol IGV

Data nilai *GV* dan nilai UCL untuk setiap sub-grup pada Tabel 8.9 memberikan diagram kontrol *IGV* pada Tahap II sebagai berikut.



Gambar 8.5. Diagram kontrol *IGV* Tahap II untuk Contoh 8.5

Langkah 10: Proses aman?

Gambar 8.5 memberikan informasi yang lebih lengkap tentang MPV.

1. Sampai dengan pengontrolan keenam, variabilitas proses selalu terkontrol.
2. Loncat ke pengontrolan ketujuh terdapat kenaikan nilai *GV*. Variabilitas proses naik walaupun masih terkontrol.
3. Pada pengontrolan kedelapan, variabilitas proses sudah tak terkontrol (OOC).
4. Kalau dibiarkan, pada pengontrolan kesembilan variabilitas proses semakin tak terkontrol.

5. Pada pengontrolan kesepuluh, variabilitas proses kembali terkontrol.

Catatan Penutup

Contoh-contoh di atas memberikan ilustrasi bagaimana caranya melakukan pengontrolan MPV berbasis sub-grup berukuran konstan dengan menggunakan statistik pengontrol GV .

Sebagai penutup bab ini, banyak literatur yang masih menggunakan diagram kontrol GV versi klasik untuk mengontrol MPV. Mengingat bahwa diagram kontrol GV tersebut memberikan UCL yang bias, sedangkan diagram kontrol IGV (GV versi baru) memberikan UCL yang tak bias, para pembaca dianjurkan untuk hanya menggunakan diagram kontrol IGV . Diskusi lebih dalam tentang pengontrolan MPV dengan menggunakan diagram kontrol GV dan IGV dapat dilihat pada Djauhari, dkk. (2019).

BAB 9

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP

BERUKURAN KONSTAN: STATISTIK VV

Seperti halnya Bab 8, bab ini pun menjelaskan langkah-langkah pengontrolan MPV berbasis sub-grup yang berukuran konstan. Namun, di sini kita menggunakan statistik pengontrol VV (vector variance). Bagi para pembaca yang ingin mempelajari lebih mendalam tentang VV , dipersilahkan membaca Djauhari (2007) berjudul “*A Measure of Multivariate Data Concentration*” yang terbit di *Journal of Applied Probability and Statistics*, USA, 2007. Dan, juga Djauhari dkk. (2008) berjudul “*Multivariate Process Variability Monitoring*” yang terbit di *Communications in Statistics: Theory and Methods*, Canada, 2008.

Di dalam berbagai literatur, termasuk antara lain,

1. Mason, R.L., Chou, Y.M., and Young, J.C. (2009) Monitoring variation in a multivariate process when the dimension is large relative to the sample size. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38, p. 939-951.
2. Ryan (2011) yang berjudul “*Statistical Methods for Quality Improvement, Third Edition*” terbitan Wiley, dan
3. Wilcox (2012) berjudul “*Introduction to Robust Estimation & Hypothesis Testing, 3rd Edition*” terbitan Elsevier,

dapat kita temui apresiasi terhadap statistik VV sebagai ukuran MPV. Berbagai apresiasi tersebut tentu akan mengukuhkan peran dari statistik VV pada kajian tentang variabilitas.

Pada bab ini, pengontrolan MPV akan dilaksanakan dengan menggunakan diagram kontrol VV . Diagram kontrol ini merupakan komplemen dari diagram kontrol IGV . Artinya, diagram yang satu dan diagram yang lain saling melengkapi. Oleh karena itu, para pembaca dianjurkan untuk menggunakan kedua diagram itu bersama-sama tatkala mengontrol MPV berdasarkan sub-grup baik berukuran konstan maupun tak konstan. Dengan menggunakan kedua diagram kontrol ini, maka proses dikatakan terkontrol jika kedua diagram menunjukkan keadaan terkontrol (*in-control* atau IC).

Langkah-langkah penggunaan diagram kontrol VV pada Tahap I adalah sebagai berikut.

Tahap I

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup yang saling bebas. Setiap sub-grup berupa matriks data berukuran $(n \times p)$ dengan n banyaknya unit sampel, p banyaknya variable, dan $n > p$. Matriks data untuk sub-grup ke- k berbentuk sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^k & \cdots & x_{np}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Pada setiap sub-grup, hitunglah *vector variance* (VV) yakni jumlah kuadrat semua elemen dari matriks kovariansi. Untuk sub-grup ke- k , jumlah kuadrat itu adalah,

$$VV^k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (s_{ij}^k)^2, \text{ dengan}$$

s_{ij}^k adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari S^k .

Langkah 5: Hitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^m$ sebagai berikut,

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^k.$$

Langkah 6: Hitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $\bar{S}$ yakni,

$$SS1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\bar{s}_{ij})^2, \text{ dengan}$$

$\bar{s}_{ij}$ adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari $\bar{S}$.

Langkah 7: Hitung $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(n-m)+2} \right\} SS1$ dengan $N = mn$; jumlah total semua unit sampel.

Langkah 8: Hitung matriks $V = \bar{S}^2$ (matriks $\bar{S}$ dikuadratkan).

Langkah 9: Hitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari matriks V yakni,

$$SS2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (v_{ij})^2, \text{ dengan}$$

v_{ij} adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari V .

Langkah 10: Hitung $\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N-m)} + \frac{12}{(N-m)^2} \right\}^{-1} SS2$.

Langkah 11: Hitung $UCL = \hat{\theta} + 3\hat{\eta}$ yang dikemukakan Djauhari dkk. (2008).

Langkah 12: Buatlah diagram kontrol VV dengan memplot nilai statistik $VV^1, VV^2, \dots, VV^m$ bersama nilai UCL pada satu diagram.

Langkah 13: Bila ada nilai statistik $VV^1, VV^2, \dots, VV^m$ yang berada di luar daerah kontrol, artinya melebihi UCL , hitunglah $\bar{S}_{HDS}$ yakni rata-rata dari semua (katakan, M buah) matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol. Jelas $M < m$. Bila semua nilai statistik itu berada di daerah kontrol, maka $M = m$. Dalam hal ini, $\bar{S}$ yang dihasilkan pada *Langkah 5* kita gunakan sebagai $\bar{S}_{HDS}$.

Contoh 9.1.

Perhatikan kembali data pada Tabel 8.1 yang kita gunakan untuk mengontrol variabilitas proses produksi serat tekstil. Sekarang kita lakukan pengontrolan, dengan menggunakan diagram kontrol VV . Dari data itu, pada Tabel 8.2 telah disajikan matriks kovariansi untuk setiap sub-grup. Oleh karena itu, kita langsung ke *Langkah 4* untuk menghitung VV .

Langkah 4: Menghitung VV setiap sub-grup

Hasil perhitungan nilai VV untuk setiap sub-grup dikemukakan pada Tabel 9.1.

Tabel 9.1. Nilai VV setiap sub-grup dan UCL

Sub-grup (k)	VV	UCL	Sub-grup (k)	VV	UCL
1	3,5994	13,9953	11	3,9434	13,9953
2	3,6223	13,9953	12	3,5222	13,9953
3	3,8448	13,9953	13	2,9269	13,9953
4	3,0751	13,9953	14	3,0715	13,9953
5	3,1585	13,9953	15	3,6498	13,9953
6	2,8153	13,9953	16	3,7435	13,9953
7	3,2959	13,9953	17	3,3225	13,9953
8	3,9289	13,9953	18	3,3295	13,9953
9	3,5508	13,9953	19	3,6634	13,9953
10	3,9135	13,9953	20	3,3114	13,9953

Langkah 5: Menghitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^{20}$

Matriks rata-rata $\bar{S}$ adalah,

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Menghitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $\bar{S}$
Kita peroleh $SS1 = 3,45$.

Langkah 7: Menghitung $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(N-m)+2} \right\} SS1 = \frac{11}{9} \left\{ 1 - \frac{2}{(200-20)+2} \right\} SS1 = 4,17033.$$

Langkah 8: Menghitung matriks $V = \bar{S}^2$

$$V = \begin{pmatrix} 2,1370 & 1,6274 \\ 1,6274 & 1,3130 \end{pmatrix}.$$

Langkah 9: Menghitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari matriks V
 $SS2 = 11,5876$.

Langkah 10: Menghitung $\hat{\eta}^2$

$$\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N-m)} + \frac{12}{(N-m)^2} \right\}^{-1} SS2 = \frac{80}{(9)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(200-20)} + \frac{12}{(200-20)^2} \right\}^{-1} SS2 \\ = 10,72553.$$

Langkah 11: Menghitung UCL

$$UCL = \hat{\theta} + 3\hat{\eta} = 4,17033 + 3\sqrt{10,72553} = 13,9953.$$

Langkah 12: Membuat diagram kontrol VV

Apabila data nilai VV dan UCL setiap sub-grup pada Tabel 9.1 kita plot pada diagram yang sama, maka kita peroleh diagram kontrol VV pada gambar berikut.



Gambar 9.1. Diagram kontrol VV pada Tahap I untuk Contoh 9.1

Langkah 13: Menentukan HDS

Diagram kontrol di atas menunjukkan bahwa seluruh data yang digunakan pada Tahap I merupakan HDS. Oleh karena itu, $M = m$ dan $\bar{S}_{HDS} = \bar{S}$ yang dihasilkan pada Langkah 5 yakni,

$$\bar{S}_{HDS} = \bar{S} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix}.$$

Catatan:

1. Diagram kontrol VV , yang diperkenalkan oleh Djauhari dkk. (2008), bertujuan untuk menutupi kelemahan diagram kontrol IGV yang telah dikemukakan di dalam Bab 8.
2. Diagram kontrol VV dan diagram kontrol IGV bersifat saling melengkapi (komplementer). Oleh karena itu, dianjurkan agar kedua diagram itu digunakan bersama-sama.
3. UCL dari diagram kontrol VV jauh lebih baik (kecepatan konvergensi lebih tinggi) ketimbang UCL diagram kontrol GV dan IGV .

Tahap II

Katakanlah di akhir Tahap I ada M buah sub-grup yang berada di dalam daerah kontrol. Artinya, matriks $\bar{S}_{HDS}$ yang akan digunakan pada Tahap II adalah rata-rata dari M buah matriks kovariansi dari semua sub-grup itu. Sekali lagi, $\bar{S}_{HDS}$ diperlukan untuk menentukan UCL pada Tahap II. Langkah-langkah pelaksanaan Tahap II adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dalam bentuk matriks seperti berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data pada kolom ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansi,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}.$$

- Langkah 4:* Hitung $VV = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (s_{ij})^2$, dengan
 s_{ij} adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari S . Jadi, VV adalah jumlah kuadrat semua elemen dari S .
- Langkah 5:* Jika $M = m$, gunakan UCL yang diperoleh di Tahap 1 dan langsung ke *Langkah 12*. Namun, jika $M < m$, ikutilah langkah selanjutnya.
- Langkah 6:* Hitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $\bar{S}_{HDS}$ yakni,
 $SS1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\bar{s}_{ij})^2$, dengan
 $\bar{s}_{ij}$ adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari $\bar{S}_{HDS}$.
- Langkah 7:* Hitung $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(N^*-M)+2} \right\} SS1$ dengan $N^* = Mn$.
- Langkah 8:* Hitung matriks $V = \bar{S}_{HDS}^2$ (kuadrat dari matriks $\bar{S}_{HDS}$).
- Langkah 9:* Hitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari V ,
 $SS2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (v_{ij})^2$, dengan
 v_{ij} adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari V .
- Langkah 10:* Hitung $\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N^*-M)} + \frac{12}{(N^*-M)^2} \right\}^{-1} SS2$.
- Langkah 11:* Hitung $UCL = \hat{\theta} + 3\hat{\eta}$ yang dikemukakan Djauhari dkk. (2008).
- Langkah 12:* Buatlah diagram kontrol VV dengan memplot nilai VV , yang diperoleh pada *Langkah 4* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.
- Langkah 13:* Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $VV < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai VV berada di luar daerah kontrol, maka pada saat itu perlu dicek apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Contoh 9.2.

Contoh ini bertujuan untuk menunjukkan keunggulan diagram kontrol VV dibandingkan dengan diagram kontrol IGV . Untuk itu, kita gunakan lagi data serat tekstil pada Contoh 8.2.

Langkah 1: Pengumpulan data

Kita ulangi melakukan pengontrolan berdasarkan data sepuluh buah matriks kovariansi hasil simulasi pada Tabel 8.4, Contoh 8.2. Jadi, kita langsung saja ke *Langkah 4*.

Langkah 4: Menghitung VV

Data pada Tabel 8.2 tersebut memberikan nilai VV pada setiap saat pengontrolan seperti yang tertera pada Tabel 9.2.

Tabel 9.2. VV kesepuluh matriks kovariansi hasil simulasi

Sub-grup	VV	UCL
1	3,4429	13,9953
2	14,7705	13,9953
3	3,5613	13,9953
4	2,6560	13,9953
5	3,8602	13,9953
6	3,6114	13,9953
7	3,7618	13,9953
8	4,0636	13,9953
9	3,5545	13,9953
10	3,4402	13,9953

Langkah 5: Apakah $M = m$ atau $M < m$?

Karena pada Tahap I diperoleh $M = m$, maka $UCL = 13,9953$ yang kita peroleh pada Tahap I dan dituliskan kembali pada Tabel 9.2 kolom ketiga untuk setiap saat pengontrolan. Kemudian, kita langsung ke *Langkah 12*.

Langkah 12: Buat diagram kontrol VV

Data nilai VV dan nilai UCL pada Tabel 9.2 memberikan diagram kontrol VV pada Gambar 9.2 berikut.



Gambar 9.2. Diagram kontrol VV pada Tahap II untuk Contoh 9.2

Langkah 13: Proses aman?

Diagram kontrol VV pada Gambar 9.2 ini menunjukkan bahwa pada saat pengontrolan kedua, proses berada dalam keadaan tak terkontrol.

Kalau kinerja ketiga diagram kontrol VV , diagram kontrol IGV dan diagram kontrol GV versi klaik kita bandingkan melalui contoh-contoh di atas, khususnya pada Tahap II, maka

tampak perbedaannya. Kinerja diagram kontrol VV pada Gambar 9.2, Contoh 9.2, berbeda dengan diagram kontrol IGV pada Gambar 8.5, Contoh 8.5. Apalagi bila dibandingkan dengan kinerja diagram kontrol GV versi klasik pada Gambar 8.2, Contoh 8.2. Diagram kontrol VV menunjukkan bahwa pada saat pengontrolan kedua, variabilitas proses berada dalam keadaan tak terkontrol. Sementara itu, diagram kontrol IGV menunjukkan keadaan tak terkontrol pada saat pengontrolan kedelapan dan kesembilan. Sedangkan, diagram kontrol GV versi klasik menunjukkan keadaan aman terkontrol.

Ketiga contoh tersebut memperkuat argumen mengapa (1) diagram kontrol IGV dan diagram kontrol VV harus digunakan bersama-sama, dan (2) penggunaan diagram kontrol GV versi klasik perlu ditinggalkan dan diganti dengan diagram kontrol IGV .

Contoh 9.3.

Data matriks kovariansi 20 sub-grup dari PT. PNDAD yang digunakan pada Tahap I, Tabel 8.6, Contoh 8.3, kita gunakan lagi untuk lebih meyakinkan tentang peran penting diagram kontrol VV khususnya pada tahap tersebut. Oleh karena itu, kita langsung ke *Langkah 4* untuk menghitung VV .

Langkah 4: Menghitung VV setiap sub-grup

Hasil perhitungan nilai VV untuk setiap sub-grup diberikan pada tabel berikut, kolom kedua dan keempat.

Tabel 9.3. Nilai VV dan UCL setiap sub-grup

Sub-grup (k)	VV	UCL	Sub-grup (k)	VV	UCL
1	0,02972	0,99727	11	0,10466	0,99727
2	0,01444	0,99727	12	0,05637	0,99727
3	1,94695	0,99727	13	0,05041	0,99727
4	0,36295	0,99727	14	0,08968	0,99727
5	0,01884	0,99727	15	0,05840	0,99727
6	2,40792	0,99727	16	13,6333	0,99727
7	0,02942	0,99727	17	0,02641	0,99727
8	0,23734	0,99727	18	0,00676	0,99727
9	0,12215	0,99727	19	0,00266	0,99727
10	0,16551	0,99727	20	0,23848	0,99727

Langkah 5: Menghitung $\bar{S}$ matriks rata-rata dari $S^1, S^2, \dots, S^2$

Matriks rata-rata $\bar{S}$ adalah,

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0,3677 & 0,0319 & -0,0760 \\ 0,0319 & 0,0454 & -0,0190 \\ -0,0760 & -0,0190 & 0,1974 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Menghitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $\bar{S}$

$SS1 = 0,19036$.

Langkah 7: Menghitung $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(N-m)+2} \right\} SS1 = \frac{6}{4} \left\{ 1 - \frac{2}{(200-20)+2} \right\} SS1 = 0,27857,$$

Langkah 8: Menghitung matriks $V = \bar{S}^2$

Kita peroleh,

$$V = \begin{pmatrix} 0,14192 & 0,01458 & -0,04326 \\ 0,01458 & 0,00343 & -0,00692 \\ -0,04326 & -0,00692 & 0,04501 \end{pmatrix}.$$

Langkah 9: Menghitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari matriks V

$$SS2 = 0,02644.$$

Langkah 10: Menghitung $\hat{\eta}^2$

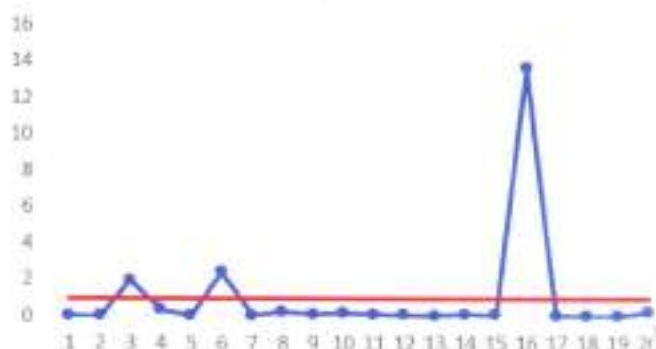
$$\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N-m)} + \frac{12}{(N-m)^2} \right\}^{-1} SS2 = \frac{60}{(4)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(200-20)} + \frac{12}{(200-20)^2} \right\}^{-1} SS2 \\ = 0,05739.$$

Langkah 11: Menghitung UCL

$$UCL = \hat{\theta} + 3\hat{\eta} = 0,02644 + 3\sqrt{0,05739} = 0,99727.$$

Langkah 12: Membuat diagram kontrol VV

Dengan memplot data nilai VV dan UCL setiap sub-grup yang ada di Tabel 9.3 pada diagram yang sama kita peroleh diagram kontrol VV pada Gambar 9.3 berikut.



Gambar 9.3. Diagram kontrol VV pada Tahap I untuk Contoh 9.3

Langkah 13: Menentukan HDS

Pesan yang diberikan oleh diagram kontrol VV pada Gambar 9.3 jelas berbeda dengan pesan yang diberikan oleh diagram kontrol IGV pada Gambar 8.3. Apabila diagram kontrol IGV mengatakan bahwa semua sub-grup merupakan HDS , atau $M = 20$, maka HDS menurut diagram kontrol VV terdiri atas 17 sub-grup yakni tanpa sub-grup nomor 3, 6, dan 16.

BAB 10

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN: STATISTIK *GV*

Bab ini mengemukakan langkah-langkah pengontrolan MPV berdasarkan skenario sampling ketiga. Artinya, pengontrolan berbasis sub-grup yang berukuran tak konstan. Adapun diagram kontrol yang akan kita gunakan pada bab ini adalah diagram kontrol *IGV* (*Improved Generalized Variance*) yang telah dibahas pada Bab 8. Berikut adalah langkah-langkahnya mulai dari Tahap I sampai dengan Tahap II.

Tahap I

Misalkan telah dikumpulkan data dari m buah sub-grup yang saling bebas. Untuk kasus sub-grup berukuran tak konstan, kita misalkan n_1 ukuran sub-grup pertama, n_2 ukuran sub-grup kedua, ..., n_m ukuran sub-grup terakhir (ke- m). Jadi, $n_1, n_2, \dots, n_m$ tidak harus sama nilainya. Nah, dalam hal ini, jumlah total unit sampel semua sub-grup adalah $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$. Dengan kata lain, N adalah jumlah total unit sampel yang digunakan di awal Tahap I.

Kemudian kita misalkan pula $S^1, S^2, \dots$, dan S^m matriks kovariansi sub-grup pertama, kedua, ..., dan ke- m . Di bawah ini adalah langkah-langkah pelaksanaan Tahap I.

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup yang saling bebas. Matriks data untuk sub-grup ke- k berbentuk sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k 1}^k & \cdots & x_{n_k p}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n_k dan j dari 1 sampai dengan p .

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Hitung S_p matriks rata-rata berbobot dari $S^1, S^2, \dots, S^m$, yakni

$$S_p = \frac{1}{N - m} \sum_{k=1}^m (n_k - 1) S^k \text{ dengan } N = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Langkah 5: Hitung $|S_p|$ dan $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ yakni determinan dari matriks-matriks S_p dan $S^1, S^2, \dots, S^m$.

Langkah 6: Hitung $b_{1,k} = \frac{1}{(n_k - 1)^p} \prod_{j=1}^p (n_i - k)$ untuk sub-grup ke- k dengan k bergerak dari 1 sampai dengan m .

Langkah 7: Hitung $b_{2,k}$ dengan k bergerak dari 1 sampai dengan m ,

$$b_{2,k} = b_{1,k}(A_k - b_{1,k}) \text{ dengan } A_k = \frac{1}{(n_k - 1)^p} \prod_{j=1}^p (n_k - j + 2).$$

Langkah 8: Hitung $b_7 = \frac{1}{(N - m)^p} \prod_{j=1}^p (N - m - j + 1)$.

Langkah 9: Hitung $b_8 = b_7(B - b_7)$ dengan $B = \frac{1}{(N - m)^p} \prod_{j=1}^p (N - m - j + 3)$.

Langkah 10: Hitung $UCL_k = |S_p| \left(\frac{b_{1,k}}{b_7} + 3 \sqrt{\frac{b_{2,k}}{b_8 + b_7^2}} \right)$ batas atas untuk sub-grup ke- k .

Langkah 11: Buatlah diagram kontrol IGV dengan memplot nilai statistik $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ bersama nilai $UCL_1, UCL_2, \dots, UCL_m$ pada satu diagram.

Langkah 12: Bila ada nilai statistik $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ yang berada di luar daerah kontrol, hitunglah $S_{p,HDS}$ matriks rata-rata berbobot dari semua matriks kovariansi sub-grup yang berada di daerah kontrol (seperti pada Langkah 4). Bila semua nilai statistik itu berada di daerah kontrol, langsung saja ke Tahap II dengan menggunakan S_p yang diperoleh pada Langkah 4 sebagai $S_{p,HDS}$.

Contoh 10.1.

Pada Contoh 6.1 telah dipertontonkan bagaimana mengontrol MPT capaian prestasi akademik siswa dalam matapelajaran Bahasa Indonesia (BI), Bahasa Inggris (Eng), dan Matematika (Mat) yang tersebar di 20 kelas. Banyaknya siswa di setiap kelas disajikan pada Tabel 6.1(a). Berikut ini, akan diperlihatkan bagaimana caranya mengontrol MPV di mana banyak siswa di kelas yang satu dan di kelas yang lain bisa berbeda. Diskusi lebih lanjut tentang

pengontrolan MPV ini, disertai contoh penerapannya, dapat diikuti di Djauhari, dkk. (2017) dan Zolkeply, dkk. (2017).

Mengingat *Langkah 1* dan *Langkah 2* telah dilakukan pada Contoh 6.1, maka di sini kita langsung saja ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Tabel 16.1 di Bab 16 menyajikan secara lengkap data nilai 20 kelas yang akan digunakan pada Tahap 1 ini. Dari data tersebut diperoleh 20 buah matriks kovariansi sebagaimana tersaji pada Tabel 10.1.

Tabel 10.1. Matriks kovariansi setiap kelas

Kelas	n	S_{11}	S_{22}	S_{33}	S_{12}	S_{13}	S_{23}
1	37	0,71038	0,40260	0,54132	0,39354	0,41888	0,34993
2	41	0,62818	0,30604	0,51799	0,32451	0,44317	0,32829
3	43	0,45679	0,39230	0,36910	0,17887	0,18038	0,18882
4	39	0,57008	0,32095	0,40934	0,23157	0,22172	0,20701
5	40	1,02333	0,43570	0,91626	0,31179	0,57393	0,30749
6	40	0,56525	0,37393	0,50562	0,08208	0,22938	0,23452
7	43	0,73250	0,48947	0,59775	0,22094	0,32867	0,25393
8	40	0,63728	0,36175	0,62611	0,37079	0,39023	0,32912
9	42	0,39803	0,49029	0,63901	0,17387	0,23392	0,31144
10	40	0,78725	0,77458	0,88424	0,33178	0,39811	0,49886
11	39	0,38323	0,33578	0,48803	0,17092	0,20219	0,17408
12	42	0,43248	0,44395	0,68811	0,23135	0,25125	0,33540
13	37	0,74849	0,60104	0,77215	0,47626	0,52776	0,45525
14	41	0,68519	0,37834	0,59372	0,08556	0,32809	0,21685
15	41	0,48853	0,73410	0,62033	0,13911	0,08689	0,08311
16	42	0,37259	0,33200	0,30725	0,13515	0,09372	0,07670
17	41	0,37038	0,42018	0,34967	0,16885	0,15195	0,15019
18	43	0,40343	0,30465	0,37517	0,20489	0,18082	0,14731
19	41	0,24774	0,25018	0,33225	0,04237	0,11533	0,13352
20	43	0,52880	0,49814	0,34199	0,23812	0,23507	0,20899

Cara membaca tabel ini adalah sebagai berikut. Umpamanya, matriks kovariansi Kelas No. 1 adalah (lihat baris ke-1),

$$S^1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71038 & 0,39354 & 0,41888 \\ 0,39354 & 0,40260 & 0,34993 \\ 0,41888 & 0,34993 & 0,54132 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Menghitung S_p matriks rata-rata berbobot

$$S_p = \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^m (n_k - 1) S^k \text{ dengan } N = \sum_{k=1}^m n_k = 815 \text{ dan } m = 20.$$

$$S_p = \begin{pmatrix} 0,55533 & 0,22307 & 0,27655 \\ 0,22307 & 0,43170 & 0,24730 \\ 0,27655 & 0,24730 & 0,54093 \end{pmatrix}.$$

Langkah 5: Menghitung determinan dari S_p dan $S^1, S^2, \dots, S^{20}$

Hasil perhitungan determinan dari S_p adalah $|S_p| = 0,06630$. Dan, determinan dari $S^1, S^2, \dots, S^{20}$ diberikan di kolom *GV* pada Tabel 10.2.

Tabel 10.2. Nilai *GV* dan *UCL* untuk setiap kelas/sub-grup

Kelas	GV	UCL	Kelas	GV	UCL
1	0,02872	0,13891	11	0,03523	0,13729
2	0,01165	0,13577	12	0,05760	0,13505
3	0,03747	0,13435	13	0,07855	0,13891
4	0,03399	0,13729	14	0,08880	0,13577
5	0,18923	0,13652	15	0,20356	0,13577
6	0,06153	0,13652	16	0,02923	0,13505
7	0,12191	0,13435	17	0,03410	0,13577
8	0,02939	0,13652	18	0,02256	0,13435
9	0,06528	0,13505	19	0,01356	0,13577
10	0,25497	0,13652	20	0,04347	0,13435

Langkah 6: Menghitung $b_{1,k}$

Hasil perhitungan $b_{1,k}$ untuk setiap kelas/sub-grup ($k = 1, 2, \dots, 20$) diberikan pada Tabel 10.3 kolom kedua.

Langkah 7: Menghitung $b_{2,k}$

Hasil perhitungan $b_{2,k}$ untuk setiap kelas/sub-grup ($k = 1, 2, \dots, 20$) diberikan pada Tabel 10.3 kolom ketiga.

Langkah 8: Menghitung b_7

Hasil perhitungan b_7 untuk setiap kelas/sub-grup ($k = 1, 2, \dots, 20$) diberikan pada Tabel 10.3 kolom keempat.

Langkah 9: Menghitung b_8

Hasil perhitungan b_8 untuk setiap kelas/sub-grup ($k = 1, 2, \dots, 20$) diberikan pada Tabel 10.3 kolom kelima.

Tabel 10.3. Nilai konstanta $b_{1,k}, b_{2,k}, b_7$ dan b_8 untuk setiap kelas/sub-grup

Kelas	$b_{1,k}$	$b_{2,k}$	b_7	b_8
1	0,91821	0,15303	0,99623	0,00752
2	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
3	0,92971	0,13282	0,99623	0,00752
4	0,92244	0,14565	0,99623	0,00752
5	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
6	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
7	0,92971	0,13282	0,99623	0,00752
8	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
9	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752
10	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
11	0,92244	0,14565	0,99623	0,00752
12	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752
13	0,91821	0,15303	0,99623	0,00752
14	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
15	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
16	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752

17	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
18	0,92971	0,13282	0,99623	0,00752
19	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
20	0,92971	0,13282	0,99623	0,00752

Langkah 10: Menghitung UCL_k

Hasil perhitungan UCL_k untuk setiap kelas/sub-grup ($k = 1, 2, \dots, 20$) diberikan pada Tabel 10.2 kolom ketiga dan keenam.

Langkah 11: Membuat diagram kontrol IGV

Dengan memplot data nilai GV dan UCL pada Tabel 10.2 pada diagram yang sama, diperoleh diagram kontrol IGV seperti tampak pada Gambar 10.1.



Gambar 10.1. Diagram kontrol IGV pada Tahap 1 untuk Contoh 10.1

Catatan:

Perhatikan bahwa, pada diagram ini UCL tidak berupa garis lurus melainkan berupa kurva (tepatnya berupa fungsi tangga). Ini akibat dari penggunaan ukuran sub-grup yang tidak konstan.

Langkah 12: Menentukan HDS

Pada gambar di atas tampak tiga kelas (No. 5, 10 dan 15) yang berada di luar daerah kontrol. Dengan demikian, HDS terdiri atas semua (kedua puluh) sub-grup kecuali ketiga sub-grup tersebut. Jadi, HDS terdiri atas $M = 17$ kelas/sub-grup. Dan, jumlah total unit sampel di dalam HDS (di akhir Tahap I) adalah $N^* = 694$. Berdasarkan HDS ini, kita hitung $S_{p,HDS}$ matriks rata-rata berbobot dari semua matriks kovariansi sub-grup dalam HDS (seperti pada Langkah 4). Hasil perhitungan memberikan,

$$S_{p,HDS} = \begin{pmatrix} 0,51896 & 0,21665 & 0,26363 \\ 0,21665 & 0,39385 & 0,23904 \\ 0,26363 & 0,23904 & 0,49484 \end{pmatrix}.$$

Catatan:

1. Diagram kontrol *IGV* dengan sub-grup berukuran tak konstan adalah pengembangan diagram kontrol *IGV* yang diperkenalkan Djauhari (2005).
2. Apabila pada kasus sub-grup berukuran konstan harga UCL konstan pada setiap sub-grup, tidak demikian halnya untuk kasus sub-grup berukuran tak konstan. Akibatnya, seperti tampak pada Gambar 10.1, UCL tidak berupa garis lurus melainkan berupa kurva fungsi tangga.

Tahap II

Katakanlah di akhir Tahap I ada M buah sub-grup yang berada di dalam daerah kontrol. Artinya, matriks $S_{p, MDS}$ diperoleh dari M buah sub-grup tersebut. Pada Tahap II, matriks ini diperlukan untuk menentukan UCL. Berikut ini langkah-langkahnya.

Langkah 1: Pengontrolan pertama dimulai dengan mengumpulkan data dalam bentuk matriks seperti berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ yakni rata-rata data pada kolom ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansi,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Hitung $|S|$; determinan matriks S .

Langkah 6: Hitung $b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{j=1}^p (n-j)$.

Langkah 7: Hitung b_2 ,

$$b_2 = b_1(A - b_1) \text{ dengan } A = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{j=1}^p (n-j+2).$$

Langkah 8: Hitung $b_7 = \frac{1}{(N^*-M)^p} \prod_{j=1}^p (N^* - M - j + 1)$ dengan $N^* = Mn$.

Langkah 9: Hitung $b_0 = b_7(B - b_7)$. Di sini $B = \frac{1}{(N^* - M)^2} \prod_{j=1}^p (N^* - M - j + 3)$.

Langkah 10: Hitung $UCL = |S_{p,HDS}| \left(\frac{b_1}{b_7} + 3 \sqrt{\frac{b_2}{b_0 + b_7^2}} \right)$.

Langkah 11: Buatlah diagram kontrol *IGV* dengan memplot nilai $|S|$ yang diperoleh pada *Langkah 4* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 12: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $|S| < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya (mungkin dengan nilai n yang berbeda) dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai $|S|$ berada di luar daerah kontrol, maka pada saat itu perlu dicek apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab mengapa terjadi OOC.

Contoh 10.2.

Berdasarkan hasil perhitungan $S_{p,HDS}$ pada Tahap I, sekarang pengontrolan variabilitas proses belajar mengajar Bahasa Indonesia (BI), Bahasa Inggris (Eng), dan Matematika (Mat) di setiap kelas dapat dilakukan.

Khusus untuk Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10, di bawah ini akan dilaporkan hasil pelaksanaan Tahap II pada pengontrolan pertama.

Langkah 1: Mengumpulkan data

Saat pertama kali dilakukan pengontrolan, data yang terkumpul berupa 10 buah matriks data. Ukuran baris untuk kelas yang satu bisa berbeda dengan kelas yang lain. Sedangkan ukuran kolomnya sama, yakni 3 kolom; BI, BEng, dan Mat. Data lengkapnya diberikan pada Tabel 10.4 yang disajikan pada Bab 16.

Langkah 2: Menghitung vektor rata-rata

Hasil perhitungan nilai rata-rata kelas diberikan pada Tabel 10.4 berikut. Kolom kedua menyatakan ukuran baris setiap kelas.

Tabel 10.4. Nilai rata-rata kelas

Kelas	n	BI	BEng	Mat
1	40	6,53	6,33	5,64
2	42	6,77	6,50	6,09
3	37	6,58	6,41	5,77
4	42	6,59	6,26	5,83
5	39	6,43	6,21	6,21
6	39	6,62	6,22	6,29
7	42	6,69	6,46	6,28
8	41	6,65	6,43	6,45
9	40	6,46	6,51	6,64
10	41	6,68	6,40	6,41

Jadi, vektor rata-rata di Kelas No. 1 dan Kelas No. 10 adalah (baris 1 dan baris 10),

$$X^1 = \begin{pmatrix} 6,53 \\ 6,33 \\ 5,64 \end{pmatrix} \text{ dan } X^{10} = \begin{pmatrix} 6,68 \\ 6,40 \\ 6,41 \end{pmatrix}$$

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Data awal pada Tabel 16.4 di Bab 16 dan data rata-rata kelas pada Tabel 10.4 memberikan matriks kovariansi Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10 sebagai berikut.

Tabel 10.5. Matriks kovariansi Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10

Kelas	s_{11}	s_{22}	s_{33}	s_{12}	s_{13}	s_{23}
1	0,29586	0,18792	0,27502	0,09804	0,06792	0,02882
2	0,29586	0,36807	0,60934	0,22359	0,24534	0,32713
3	0,14260	0,30358	0,44392	0,08736	0,15538	0,22400
4	0,30434	0,27664	0,62860	0,12607	0,19244	0,08792
5	0,35079	0,31932	0,38307	0,02457	0,14186	0,04040
6	0,50415	0,34594	0,48314	0,22782	0,27200	0,13852
7	0,68301	0,35421	0,28761	0,20188	0,11563	0,06519
8	0,84808	0,37197	0,45254	0,27089	0,35837	0,08249
9	0,81367	0,46237	0,52024	0,34071	0,31827	0,26123
10	0,75958	0,59566	0,56313	0,23770	0,24525	0,12684

Jadi, pada saat pengontrolan pertama ini, matriks kovariansi Kelas No. 1 adalah,

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0,29586 & 0,09804 & 0,06792 \\ 0,18792 & 0,18792 & 0,02882 \\ 0,06792 & 0,02882 & 0,27502 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Menghitung determinan matriks S

Hasil perhitungan determinan matriks kovariansi S , untuk setiap kelas yang dikontrol diberikan di kolom GV pada Tabel 10.6.

Tabel 10.6. Nilai GV dan UCL untuk kelas yang dikontrol

Kelas	GV	UCL
1	0,01192	0,18792
2	0,01797	0,36807
3	0,00743	0,30358
4	0,03460	0,27664
5	0,03596	0,31932
6	0,04109	0,34594
7	0,05327	0,35421
8	0,07202	0,37197
9	0,08962	0,46237
10	0,18971	0,59566

Langkah 5: Menghitung b_1

Nilai b_1 tergantung kepada banyak siswa di setiap kelas n pada saat dilakukan pengontrolan. Pada saat pengontrolan pertama terhadap Kelas No.1 sampai dengan Kelas No. 10, hasil perhitungan memberikan nilai b_1 pada kolom ketiga Tabel 10.7.

Tabel 10.7. Nilai b_1 , b_2 , b_7 , dan b_8 untuk 10 kelas yang dikontrol

Kelas	n	b_1	b_2	b_7	b_8
1	40	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
2	42	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752
3	37	0,91821	0,15303	0,99623	0,00752
4	42	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752
5	39	0,92244	0,14565	0,99623	0,00752
6	39	0,92244	0,14565	0,99623	0,00752
7	42	0,92802	0,13581	0,99623	0,00752
8	41	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752
9	40	0,92439	0,14221	0,99623	0,00752
10	41	0,92625	0,13894	0,99623	0,00752

Kolom kedua menyatakan banyak siswa di setiap kelas pada saat pengontrolan yang pertama.

Langkah 6: Menghitung b_2

Seperti nilai b_1 , nilai b_2 pun tergantung kepada banyak siswa di setiap kelas n pada saat dilakukan pengontrolan. Hasil perhitungan pada saat pengontrolan pertama terhadap Kelas No.1 sampai dengan Kelas No. 10, memberikan nilai b_2 pada kolom keempat Tabel 10.7.

Langkah 8: Menghitung b_7

Nilai b_7 tidak tergantung kepada banyak siswa di setiap kelas n pada saat dilakukan pengontrolan. Ia hanya tergantung kepada N^* dan M . Hasil perhitungan memberikan nilai b_7 pada kolom kelima Tabel 10.7.

Langkah 9: Menghitung b_8

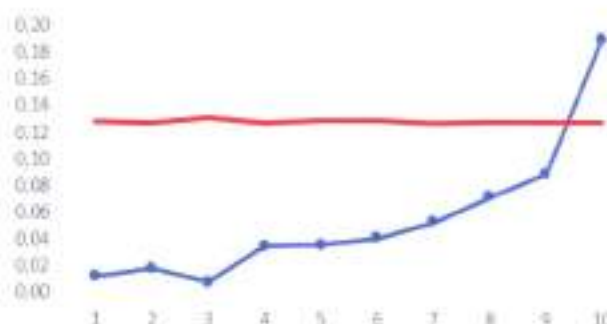
Nilai b_8 sama seperti b_7 yang hanya tergantung kepada N^* dan M . Hasil perhitungan memberikan nilai b_8 pada kolom keenam Tabel 10.7.

Langkah 10: Menghitung UCL

Perhitungan memberikan nilai UCL untuk setiap kelas di kolom ketiga Tabel 10.6.

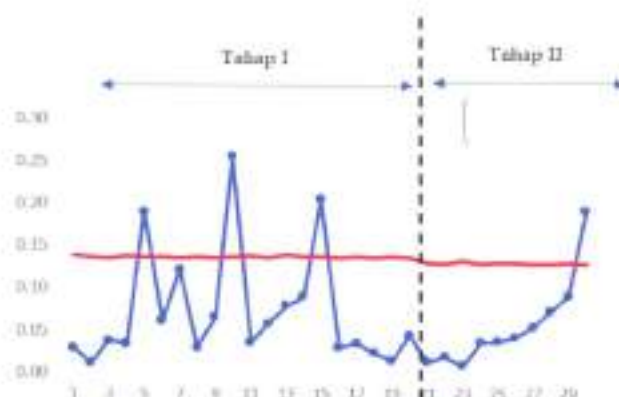
Langkah 11: Membuat diagram kontrol IGV

Dengan memplot data pada Tabel 10.6 pada diagram yang sama, kita peroleh diagram kontrol IGV saat pengontrolan pertama pada Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10 seperti tampak pada Gambar 10.2.



Gambar 10.2. Diagram kontrol *IGV* pada Tahap II untuk Contoh 10.2

Apabila kedua Gambar 10.1 dan Gambar 10.2 disambung, kita peroleh Gambar 10.3 yang memberikan gambaran menyeluruh dari Tahap I sampai dengan Tahap II tentang kualitas proses belajar mengajar ketiga matakuliah tersebut di atas,



Gambar 10.3. Diagram kontrol *IGV* Tahap I & Tahap II untuk Contoh 10.1-10.2

Pada gambar ini, nomor urut 21 sampai 30 sepanjang sumbu horizontal menunjuk kepada Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10 pada Tahap II.

Langkah 12: Bagaimana dengan kualitas proses belajar mengajar?

Gambar 10.2 atau Gambar 10.3 memperlihatkan bahwa pada saat pengontrolan, Kelas No. 10 berbeda secara signifikan dari kelas-kelas lainnya. Variabilitas nilai siswa di kelas tersebut sangat tinggi. Artinya, kualitas proses belajar mengajar di kelas tersebut perlu diwaspadai dan dikaji penyebab-penyebabnya.

Penyelidikan akar penyebab terjadinya OOC pada Kelas No. 10 menjadi tantangan tersendiri bagi manajemen sekolah dalam upaya meningkatkan proses belajar mengajar secara kontinu/terus menerus.

BAB 11

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP BERUKURAN TAK KONSTAN: STATISTIK VV

Seperti pada Bab 9, bab ini pun menjelaskan langkah-langkah pengontrolan MPV dengan menggunakan statistik VV , namun dengan basis sub-grup berukuran tak konstan. Selanjutnya, seperti pada Bab 10, sekadar untuk mengingat kembali, tatkala mengawali Tahap I misalkan telah dikumpulkan data dari m buah sub-grup yang saling bebas dengan ukuran sub-grup tak konstan. Kita misalkan n_1 ukuran sub-grup pertama, n_2 ukuran sub-grup kedua, ..., n_m ukuran sub-grup terakhir (ke- m). Jadi, $n_1, n_2, \dots, n_m$ tidak harus sama nilainya. Jadi, jumlah total unit sampel yang digunakan di awal Tahap I adalah $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{k=1}^m n_k$.

Kemudian kita misalkan pula $S^1, S^2, \dots$, dan S^m matriks kovariansi sub-grup pertama, kedua, ..., dan ke- m . Di bawah ini adalah langkah-langkah pelaksanaan Tahap I dengan menggunakan diagram kontrol VV berbasis sub-grup tak konstan.

Tahap I

Langkah 1: Ambil m buah sub-grup yang saling bebas. Setiap sub-grup berupa matriks data; untuk sub-grup ke- k , matriks data itu berukuran $(n_k \times p)$ dengan $n_k > p$. Bentuk matriks data pada sub-grup ke- k adalah,

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k 1}^k & \cdots & x_{n_k p}^k \end{pmatrix}.$$

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i pada sub-grup ke- k . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n_k , j dari 1 sampai dengan p , dan $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-ratanya. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Pada setiap sub-grup, hitung VV yakni jumlah kuadrat semua elemen dari matriks kovariansinya. Untuk sub-grup ke- k , jumlah kuadrat itu adalah,

$$VV^k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (s_{ij}^k)^2, \text{ dengan}$$

s_{ij}^k adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari S^k .

Langkah 5: Hitung S_p matriks rata-rata berbobot dari $S^1, S^2, \dots, S^m$,

$$S_p = \frac{1}{N - m} \sum_{k=1}^m (n_k - 1) S^k \text{ dengan } N = \sum_{k=1}^m n_k \text{ adalah jumlah total unit sampel semua grup di awal Tahap I.}$$

Langkah 6: Hitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari S_p yakni,

$$SS1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\bar{s}_{ij})^2, \text{ dengan } \bar{s}_{ij} \text{ adalah elemen baris ke-}i \text{ dan kolom ke-}j \text{ dari } S_p.$$

Langkah 7: Hitung $\hat{\theta}_k = \frac{n_k + 1}{n_k - 1} \left\{ 1 - \frac{2}{N - m + 2} \right\} SS1$.

Langkah 8: Hitung matriks $V = S_p^2$ (perkalian matriks S_p dengan S_p).

Langkah 9: Hitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari V yakni,

$$SS2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (v_{ij})^2, \text{ dengan } v_{ij} \text{ adalah elemen baris ke-}i \text{ dan kolom ke-}j \text{ dari } V.$$

Langkah 10: Hitung $\hat{\eta}_k^2 = \frac{n_k}{(n_k - 1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{N - m} + \frac{12}{(N - m)^2} \right\}^{-1} SS2$.

Langkah 11: Hitung $UCL_k = \hat{\theta}_k + 3\hat{\eta}_k$ untuk setiap sub-grup; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 12: Buatlah diagram kontrol VV dengan memplot nilai statistik $VV^1, VV^2, \dots, VV^m$ bersama nilai $UCL1, UCL2, \dots, UCLm$ pada satu diagram.

Langkah 13: Bila di antara $VV^1, VV^2, \dots, VV^m$ ada yang di luar daerah kontrol, artinya ada $VV^k > UCL_k$, hitung $S_{p,HDS}$ (yakni rata-rata berbobot dari semua matriks kovariansi yang berada di daerah kontrol). Lalu, lanjutkan ke Tahap II. Sebaliknya, jika nilai semua statistik itu lebih kecil dari UCL , maka langsung saja ke Tahap II dengan menggunakan S_p hasil hitungan pada Langkah 5 sebagai $S_{p,HDS}$.

Contoh 11.1.

Kita analisis kembali data pada Contoh 10.1 dengan menggunakan diagram kontrol VV . Oleh karena itu, kita langsung saja ke *Langkah 4*.

Langkah 4: Menghitung VV

Nilai VV untuk setiap sub-grup diberikan pada Tabel 11.1, kolom kedua dan kelima.

Tabel 11.1. Nilai VV dan UCL untuk setiap sub-grup

Kelas	VV	UCL	Kelas	VV	UCL
1	1,86532	2,69451	11	0,69858	2,69451
2	1,57554	2,61070	12	1,31591	2,61070
3	0,69916	2,57357	13	2,94292	2,57357
4	0,88683	2,65087	14	1,28911	2,65087
5	3,11886	2,63038	15	1,22999	2,63038
6	0,94367	2,63038	16	0,40932	2,63038
7	1,57608	2,57357	17	0,58431	2,57357
8	1,72515	2,63038	18	0,58907	2,63038
9	1,17103	2,59178	19	0,30020	2,59178
10	3,03648	2,63038	20	0,95600	2,63038

Langkah 5: Menghitung matriks S_p

Hasil perhitungan matriks S_p (matriks rata-rata berbobot dari $S^1, S^2, \dots, S^{20}$) telah diperoleh pada Contoh 10.1 yakni,

$$S_p = \begin{pmatrix} 0,55533 & 0,22307 & 0,27655 \\ 0,22307 & 0,43170 & 0,24730 \\ 0,27655 & 0,24730 & 0,54093 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Menghitung $SS1$

$SS1$, yakni jumlah kuadrat semua elemen dari S_p , adalah $SS1 = 1,16215$.

Langkah 7: Menghitung $\hat{\theta}_k$

Untuk setiap sub-grup, nilai $\hat{\theta}_k = \frac{n_k+1}{n_k-1} \left(1 - \frac{2}{N-m+2} \right) SS1$ diberikan pada Tabel 11.2, kolom kedua dan kelima.

Tabel 11.2. Nilai $\hat{\theta}_k$ dan $\hat{\eta}_k^2$ untuk setiap kelas/sub-grup

Kelas	$\hat{\theta}_k$	$\hat{\eta}_k^2$	Kelas	$\hat{\theta}_k$	$\hat{\eta}_k^2$
1	1,22364	0,24039	11	1,22025	0,22741
2	1,21720	0,21576	12	1,21578	0,21037
3	1,21444	0,20525	13	1,22364	0,24039
4	1,22025	0,22741	14	1,21720	0,21576
5	1,21868	0,22143	15	1,21720	0,21576
6	1,21868	0,22143	16	1,21578	0,21037
7	1,21444	0,20525	17	1,21720	0,21576
8	1,21868	0,22143	18	1,21444	0,20525
9	1,21578	0,21037	19	1,21720	0,21576
10	1,21868	0,22143	20	1,21444	0,20525

Langkah 8: Menghitung matriks V

Matriks V yang sama dengan S_p^2 (kuadrat dari matriks S_p) adalah,

$$V = \begin{pmatrix} 0,43463 & 0,28856 & 0,35834 \\ 0,28856 & 0,29728 & 0,30222 \\ 0,35834 & 0,30222 & 0,43024 \end{pmatrix}.$$

Langkah 9: Menghitung $SS2$

$SS2$, yakni jumlah kuadrat semua elemen dari matriks V , adalah $SS2 = 1,06841$.

Langkah 10: Menghitung $\hat{\eta}_k^2$

Untuk setiap sub-grup, nilai $\hat{\eta}_k^2$ diberikan pada Tabel 11.2, kolom ketiga dan keenam.

Langkah 11: Hitung UCL_k

Untuk setiap sub-grup, nilai $UCL_k = \hat{\theta}_k + 3\hat{\eta}_k$ diberikan pada Tabel 11.1, kolom ketiga dan keenam.

Langkah 12: Membuat diagram kontrol VV

Data nilai VV dan UCL pada Tabel 11.1 kita plot pada diagram yang sama untuk menghasilkan diagram kontrol VV seperti tampak pada Gambar 11.1.



Gambar 11.1. Diagram kontrol VV pada Tahap I untuk Contoh 11.1

Jelas terlihat bahwa variabilitas proses belajar mengajar yang diperlihatkan diagram kontrol VV berbeda dengan yang diperlihatkan diagram kontrol IGV pada Gambar 10.1. Ini, sekali lagi memperlihatkan pentingnya kedua diagram tersebut digunakan bersama-sama.

Langkah 13: Menentukan HDS

Gambar 11.1 menunjukkan bahwa variabilitas proses belajar mengajar di Kelas No. 5, No. 10 dan No. 13, berbeda secara signifikan dengan kelas-kelas lainnya. Dengan demikian, berdasarkan diagram kontrol VV , HDS terdiri atas semua sub-grup (20 kelas) kecuali ketiga kelas yang berada di luar daerah kontrol tersebut. Ini berbeda dengan HDS yang diberikan oleh diagram kontrol IGV (lihat kembali Contoh 10.1). HDS menurut diagram kontrol IGV adalah semua kelas/sub-grup kecuali Kelas No. 5, No. 10 dan No. 15.

Jadi, berdasarkan diagram kontrol VV , maka $M = 17$, $N^* = 698$ (jumlah total semua ukuran sub-grup di akhir Tahap I), dan $S_{p,HDS}$ adalah,

$$S_{p,HDS} = \begin{pmatrix} 0,50504 & 0,19838 & 0,23928 \\ 0,19838 & 0,40288 & 0,21845 \\ 0,23928 & 0,21845 & 0,48755 \end{pmatrix}$$

Tahap II

Katakanlah di akhir Tahap I ada M buah sub-grup yang berada di dalam daerah kontrol. Artinya, matriks $S_{p,HDS}$ yang akan digunakan pada Tahap II adalah rata-rata berbobot dari M buah sub-grup tersebut. Tentu saja $M \leq m$. Pada Tahap II, matriks $S_{p,HDS}$ ini diperlukan untuk menentukan batas atas kontrol pada setiap pengontrolan.

Langkah 1: Pengontrolan dimulai dengan mengumpulkan data dalam bentuk matriks seperti pada *Langkah 1*, Tahap I,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ yakni rata-rata data pada kolom ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansinya,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung $VV = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (s_{ij})^2$, dengan s_{ij} adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari S . Jadi, VV adalah jumlah kuadrat semua elemen dari matriks S .

Langkah 5: Hitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $S_{p,HDS}$ yakni,

$SS1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\bar{s}_{ij})^2$, dengan $\bar{s}_{ij}$ adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari $S_{p,HDS}$.

Langkah 6: Hitung $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(N^*-M)+2} \right\} SS1$; n di sini adalah ukuran sub-grup pada saat pengontrolan yang nilainya bisa berbeda dengan saat pengontrolan berikutnya.

Langkah 7: Hitung matriks $V = S_{p,HDS}^2$ (kuadrat dari matriks $S_{p,HDS}$).

Langkah 8: Hitung $SS2$ jumlah kuadrat semua elemen dari V yakni,

$$SS2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (v_{ij})^2, \text{ dengan } v_{ij} \text{ adalah elemen baris ke-} i \text{ dan kolom ke-} j \text{ dari } V.$$

Langkah 9: Hitung $\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N'-M)} + \frac{12}{(N'-M)^2} \right\}^{-1} SS2$; n di sini sama seperti pada *Langkah 6*.

Langkah 10: Hitung $UCL = \hat{\theta} + 3\hat{\eta}$.

Langkah 11: Buatlah diagram kontrol VV dengan memplot nilai VV yang diperoleh pada *Langkah 4* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 12: Jika diagram kontrol menunjukkan keadaan terkontrol, artinya $VV < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1* (mungkin dengan nilai n yang berbeda). Jika di suatu saat pengontrolan nilai VV berada di luar daerah kontrol, maka pada saat itu perlu dicek apakah terjadi *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, proses berjalan terus dan pengontrolan dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis lebih lanjut untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Contoh 11.2.

Sekarang, data pada Contoh 10.2 kita analisis dengan menggunakan diagram kontrol VV . Pada Contoh 10.2, pelaksanaan Tahap II untuk mengontrol variabilitas di Kelas No. 1 sampai dengan Kelas No. 10 dilakukan dengan menggunakan diagram kontrol IGV . Di bawah ini akan dilaporkan hasil pelaksanaan Tahap II dengan menggunakan diagram kontrol VV . Untuk itu, kita langsung saja ke *Langkah 4* mengingat *Langkah 1* sampai dengan *Langkah 3* dapat merujuk ke Contoh 10.2.

Langkah 4: Menghitung VV

Hasil perhitungan nilai VV untuk setiap kelas yang dikontrol dapat dilihat di kolom VV pada Tabel 11.3.

Tabel 11.3. Nilai VV dan UCL untuk kelas yang dikontrol

Kelas	n	VV	UCL
1	40	0,22859	2,11913
2	42	1,02871	2,08820
3	37	0,47346	2,17052
4	42	0,68560	2,08820
5	39	0,41648	2,13555
6	39	0,89742	2,13555
7	42	0,79144	2,08820
8	41	1,47963	2,10337
9	40	1,71774	2,11913
10	41	1,51436	2,10337

Langkah 5: Menghitung $SS1$ jumlah kuadrat semua elemen dari $S_{p,HDS}$

Pada Tahap 1 telah diperoleh $S_{p,HDS}$ sebagai berikut.

$$S_{p,HDS} = \begin{pmatrix} 0,50504 & 0,19838 & 0,23928 \\ 0,19838 & 0,40288 & 0,21845 \\ 0,23928 & 0,21845 & 0,48755 \end{pmatrix}$$

Jadi, jumlah kuadrat semua elemen dari $S_{p,HDS}$ adalah, $SS1 = 0,94374$.

Langkah 6: Menghitung $\hat{\theta}$

Cara menghitung $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(N^*-M)+2} \right\} SS1$ untuk setiap kelas adalah sebagai berikut. Untuk Kelas No. 1, $n = 40$ (lihat Tabel 11.3 di atas). Sedangkan untuk semua kelas yang dikontrol, $N^* = 698$ dan $M = 17$. Jadi, untuk Kelas No. 1, $\hat{\theta} = \frac{40+1}{40-1} \left\{ 1 - \frac{2}{(698-17)+2} \right\} (0,94374) = 0,98923$. Untuk kelas-kelas lainnya, caranya sama saja; tinggal mengganti nilai n dengan yang sesuai. Hasil perhitungan untuk semua kelas diberikan pada Tabel 11.4, kolom kedua, berikut.

Tabel 11.4. Nilai $\hat{\theta}$ dan $\hat{\eta}^2$ untuk setiap kelas yang dikontrol

Kelas	$\hat{\theta}$	$\hat{\eta}^2$
1	0,98923	0,14185
2	0,98687	0,13477
3	0,99325	0,15400
4	0,98687	0,13477
5	0,99050	0,14568
6	0,99050	0,14568
7	0,98687	0,13477
8	0,98802	0,13822
9	0,98923	0,14185
10	0,98802	0,13822

Langkah 7: Menghitung matriks V

Matriks V adalah kuadrat dari matriks $S_{p,HDS}$. Hasil perhitungan memberikan,

$$V = \begin{pmatrix} 0,35167 & 0,23238 & 0,28084 \\ 0,23238 & 0,24939 & 0,24198 \\ 0,28084 & 0,24198 & 0,34268 \end{pmatrix}$$

Langkah 8: Menghitung $SS2$

$SS2$ adalah jumlah kuadrat semua elemen dari matriks V di atas. Jadi, $SS2 = 0,68615$.

Langkah 9: Menghitung $\hat{\eta}^2$

Cara menghitung $\hat{\eta}^2 = \frac{8n}{(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(N^*-M)} + \frac{12}{(N^*-M)^2} \right\}^{-1} SS2$ untuk setiap kelas adalah sebagai berikut. Untuk Kelas No. 1, $n = 40$ (lihat Tabel 11.3 di atas). Sedangkan untuk semua kelas yang dikontrol, $N^* = 698$ dan $M = 17$. Jadi, untuk Kelas No. 1, $\hat{\eta}^2 = \frac{8(40)}{(40-1)^2} \left\{ 1 + \frac{12}{(698-17)} + \frac{12}{(698-17)^2} \right\}^{-1} (0,68615) = 0,14185$.

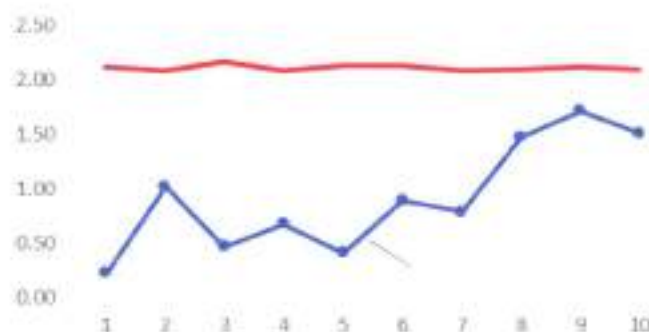
$\frac{12}{(698-17)^2} \}^{-1} (0,68615) = 0,14185$. Untuk kelas-kelas lainnya, caranya sama saja; tinggal mengganti nilai n dengan yang sesuai. Hasil perhitungan untuk semua kelas diberikan pada Tabel 11.4, kolom ketiga.

Langkah 10: Menghitung UCL

Nilai $UCL = \bar{\theta} + 3\bar{\eta}$ untuk setiap kelas diberikan pada Tabel 11.3, kolom terakhir. Umpamanya, untuk Kelas No. 1, $UCL = 0,98923 + 3 \sqrt{0,14185} = 2,11913$.

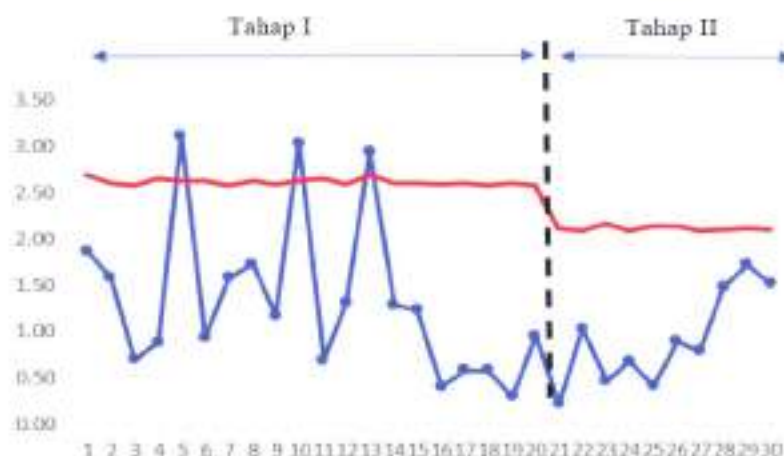
Langkah 11: Membuat diagram kontrol VV

Jika data nilai VV dan nilai UCL pada Tabel 11.3 kita plot pada diagram yang sama, akan diperoleh diagram kontrol VV seperti pada gambar berikut.



Gambar 11.2. Diagram kontrol VV pada Tahap II untuk Contoh 11.2

Apabila kedua diagram kontrol VV pada Tahap I dan Tahap II disambung, maka diperoleh gambar berikut yang lebih komprehensif dan menyeluruh.



Gambar 11.3. Diagram kontrol VV Tahap I dan Tahap II untuk Contoh 11.1-11.2

Langkah 12: Proses aman?

Gambar 11.2, seperti juga Gambar 11.3, menunjukkan bahwa berdasarkan diagram kontrol VF pada pengontrolan pertama tidak ada satu pun kelas yang memiliki variabilitas proses belajar mengajar yang berbeda secara signifikan. Tentu, ini merupakan sebuah prestasi bagi manajemen sekolah.

Upaya berikutnya yang perlu dilakukan oleh manajemen sekolah dan para guru adalah memperkecil variabilitas di setiap kelas khususnya Kelas No. 8 – Kelas No. 10. Ini bukan pekerjaan yang mudah karena menuntut kepemimpinan (*leadership*) manajerial/sosial yang mumpuni di samping kepemimpinan dalam bidang kualitas yang baik.

BAB 12

TEKNIK BERBASIS SUB-GRUP DENGAN CTQ BERBEDA: STATISTIK *EV* DAN *EVV*

Skenario sampling yang menjadi topik bahasan pada bab ini berbeda dengan ketiga skenario sebelumnya yang telah kita bahas mulai dari Bab 4 sampai dengan Bab 11. Pada bab ini, kita berhadapan dengan skenario sampling keempat di mana sub-grup yang satu dan sub-grup yang lain bisa berbeda dalam hal:

1. Jumlah CTQ dan/atau
2. Jenis CTQ dan/atau
3. Ukuran sub-grup.

Namun demikian, kita akan membatasi diri kepada ukuran sub-grup (n) yang cukup besar sehingga pendekatan distribusi normal dapat digunakan. Dalam penerapan SPC di industri manufaktur, nilai n yang lebih besar atau sama dengan 20 biasa dianggap cukup besar (Montgomery, 2001, 2005, 2009, 2019).

Contoh penerapan skenario sampling keempat yang sangat populer, banyak dijumpai di, dan sering dihadapi oleh, manajemen lembaga penyedia jasa seperti jasa keuangan, jasa perhotelan, jasa hiburan, jasa pendidikan, ... dsb, yakni tatkala mereka berupaya meningkatkan kualitas proses pemberian jasa secara terus menerus (*Continuous Quality Improvement*). Sebagai contoh, para guru dan manajemen sekolah, juga para dosen dan manajemen perguruan tinggi, senantiasa berhadapan dengan upaya meningkatkan kualitas proses belajar mengajar secara terus menerus di mana matakuliah-matakuliah (CTQ) di suatu semester berbeda dengan di semester lainnya.

Umpamanya, bagaimana membandingkan variabilitas proses belajar mengajar di Semester 1 dan Semester 5 di sebuah Perguruan Tinggi? Sedangkan,

1. Jumlah matakuliah (CTQ) di Semester 1 dan Semester 5 bisa berbeda
2. Jenis matakuliah (CTQ) di kedua semester itu berbeda
3. Jumlah mahasiswa (ukuran sub-grup) di kedua semester itu bisa berbeda

Untuk menjawab pertanyaan seperti di atas, dalam perspektif MVSPC, statistik *EV* (*Effective Variance*) dapat digunakan seperti yang dicontohkan oleh Carlos Garcia-Diaz (2007). Statistik ini, silahkan lihat Serfling (1980), dikembangkan dari *GV* dan didefinisikan sebagai berikut,

$$EV = \sqrt[p]{GV},$$

di mana p adalah jumlah banyaknya CTQ yang digunakan dalam mengukur kualitas proses.

Mengingat GV adalah determinan dari matriks kovariansi S yang berukuran $(p \times p)$; p baris dan p kolom, dengan mengambil akar pangkat p dari $|S|$ yakni $\sqrt[p]{|S|}$, maka statistik EV tidak lagi terpengaruh oleh nilai p (bebas dari banyaknya CTQ). Dengan demikian, lihat Asrah, dkk. (2018), EV dapat digunakan untuk membandingkan dua sub-grup yang berbeda CTQ, baik jumlah maupun jenisnya.

Selain EV , untuk menjawab pertanyaan seperti di atas; dapat pula digunakan statistik EVV (*Effective Vector Variance*). Apabila EV dikembangkan dari GV , maka dengan cara yang serupa Asrah (2019) mengembangkan EVV dari VV dan mendefinisikan EVV sebagai berikut,

$$EVV = \frac{1}{p} VV = \frac{1}{p} \text{Tr}(S^2).$$

Sebagai catatan, pengembangan EVV dari VV telah mendapat banyak apresiasi dari komunitas saintifik internasional. Pada tahun 2021, Djauhari dan Asrah menerima anugerah Gold Medal Award bidang *Statistics* dari RISE 2021 (*International Research and Innovation Symposium and Exposition 2021*). Kemudian, pada 2022 menerima Silver Medal Award bidang *ICT (Information and Communication Technology)* dari MTE 2022 (*Malaysia Technology Exposition 2022*).

Berikut adalah contoh bagaimana EV dan EVV berperan dalam membandingkan variabilitas dua proses yang berbeda.

Contoh 12.1

Mari kita perhatikan kembali Contoh 6.2. Pada contoh itu, *Langkah 5* memberikan matriks kovariansi S^{19} berdasarkan matriks data Kelas 19 pada Tabel 6.6,

$$S^{19} = \begin{pmatrix} 0,07580 & 0,01648 & 0,00876 & 0,08166 & 0,08869 & 0,07722 & 0,03864 & 0,17245 \\ 0,01648 & 0,18929 & 0,00015 & 0,24817 & 0,16930 & 0,19287 & -0,05944 & 0,15544 \\ 0,00876 & 0,00015 & 0,33475 & 0,11880 & 0,17383 & 0,20698 & 0,28082 & 0,14656 \\ 0,08166 & 0,24817 & 0,11880 & 1,26386 & 0,71330 & 0,46566 & 0,29694 & 0,69974 \\ 0,08869 & 0,16930 & 0,17383 & 0,71330 & 0,93937 & 0,35530 & 0,47973 & 0,66863 \\ 0,07722 & 0,19287 & 0,20698 & 0,46566 & 0,35530 & 0,75337 & 0,07400 & 0,50632 \\ 0,03864 & -0,05944 & 0,28082 & 0,29694 & 0,47973 & 0,07400 & 0,67610 & 0,24769 \\ 0,17245 & 0,15544 & 0,14656 & 0,69974 & 0,66863 & 0,50632 & 0,24769 & 0,95631 \end{pmatrix}.$$

Kalau kita cermati lebih lanjut, matriks ini terdiri atas tiga sub-matriks;

1. Pertama, sub-matriks kovariansi kelompok matakuliah sains sosial; A (Pancasila), B (Kewarganegaraan), dan C (Bahasa Inggris). Sub-matriks ini letaknya pada tiga baris pertama dan tiga kolom pertama dari S^{19} yakni,

$$S_{A-C}^{19} = \begin{pmatrix} 0,07580 & 0,01648 & 0,00876 \\ 0,01648 & 0,18929 & 0,00015 \\ 0,00876 & 0,00015 & 0,33475 \end{pmatrix}.$$

2. Kedua, sub-matriks kovariansi kelompok matakuliah sains natural; D (Kalkulus), E (Algoritma), F (Praktikum C++), G (Teknik Informatik), dan H (Matematika Diskrit). Sub-matriks ini letaknya pada lima baris terakhir dan lima kolom terakhir yakni,

$$S_{D-H}^{19} = \begin{pmatrix} 1,26386 & 0,71330 & 0,46566 & 0,29694 & 0,69974 \\ 0,71330 & 0,93937 & 0,35530 & 0,47973 & 0,66863 \\ 0,46566 & 0,35530 & 0,75337 & 0,07400 & 0,50632 \\ 0,29694 & 0,47973 & 0,07400 & 0,67610 & 0,24769 \\ 0,69974 & 0,66863 & 0,50632 & 0,24769 & 0,95631 \end{pmatrix}$$

3. Ketiga, sub-matriks kovariansi sisanya yang terletak pada tiga baris pertama dan lima kolom terakhir, atau pada lima baris terakhir dan tiga kolom pertama. Sub-matriks ini adalah kovariansi antara tiga matakuliah kelompok sains sosial dan lima matakuliah kelompok sains natural.

Nah, dengan memperhatikan kedua matriks S_{A-C}^{19} dan S_{D-H}^{19} , bagaimana kita dapat membandingkan variabilitas proses belajar mengajar kelompok sains sosial dan kelompok sains natural? Di sinilah peran statistik EV dan EVV . Cara menggunakannya sebagai berikut.

Pertama, dengan menggunakan EV

Langkah 1. Hitung determinan matriks S_{A-C}^{19} . Hasilnya, $|S_{A-C}^{19}| = 0,00470$.

Langkah 2. Hitung determinan matriks S_{D-H}^{19} . Hasilnya, $|S_{D-H}^{19}| = 0,05566$.

Langkah 3. Jadi, EV untuk kelompok sains sosial adalah $EV_{A-C} = \sqrt[3]{0,00470} = 0,16748$.

Sedangkan untuk kelompok sains natural adalah $EV_{D-H} = \sqrt[3]{0,05566} = 0,56118$. Artinya, berdasarkan EV , variabilitas proses belajar mengajar kelompok sains natural lebih dari tiga kali lipat variabilitas proses belajar mengajar kelompok sains sosial.

Kedua, dengan menggunakan EVV

Langkah 1. Hitung VV dari matriks S_{A-C}^{19} . Hasilnya, $VV_{A-C}^{19} = 0,15433$.

Langkah 2. Hitung VV dari matriks S_{D-H}^{19} . Hasilnya, $VV_{D-H}^{19} = 9,27912$.

Langkah 3. Jadi, EVV untuk kelompok sains sosial adalah $EVV_{A-C} = 0,15433/3 = 0,05144$.

Sedangkan untuk kelompok sains natural adalah $EVV_{D-H} = 9,27912/5 = 1,85582$. Artinya, menurut EVV , variabilitas proses belajar mengajar kelompok sains natural lebih dari tiga puluh enam kali lipat variabilitas proses belajar mengajar kelompok sains sosial.

Contoh ini memberikan gambaran tentang peran EV dan EVV dalam upaya membandingkan dua atau beberapa sub-grup (kelompok) berdasarkan skenario sampling keempat. Sekarang, mari kita gunakan kedua statistik ini dalam pengontrolan MPV.

1. Pengontrolan dengan statistik EV

Pada bab-bab sebelumnya, pengontrolan variabilitas proses dilakukan terhadap satu *single* proses saja. Artinya, baik pada Tahap I maupun pada setiap saat pengontrolan di Tahap II,

CTQ yang digunakan sama; baik jumlahnya maupun jenisnya. Lalu, keadaan proses pada setiap saat pengontrolan di Tahap II dibandingkan dengan keadaan “ideal” yang dijadikan referensi. Keadaan “ideal” ini adalah keadaan yang digambarkan oleh HDS di akhir Tahap I.

Nah, dengan skenario sampling keempat, di bawah ini kita akan mengontrol dan membandingkan beberapa proses yang berbeda namun sejenis. Pengertian sejenis akan dijelaskan melalui contoh-contoh seperti pada Contoh 12.1 di atas di mana data yang dikumpulkan tidak memiliki satuan (seperti skor nilai). Sedangkan proses yang berbeda, artinya CTQ proses yang satu berbeda dengan proses yang lain; mungkin jumlahnya atau jenisnya. Cara pengontrolan beberapa proses seperti itu mirip dengan pengontrolan proses produksi industri manufaktur dengan jumlah produk yang terbatas/sedikit (*short run production process*). Maksudnya, keterbatasan jumlah produksi yang tidak memungkinkan pengumpulan data m buah (m antara 20 dan 30) sub-grup untuk melaksanakan Tahap I. Nah, agar supaya proses seperti itu tetap dapat dikontrol secara statistik, beberapa proses sejenis digabung (walau dengan CTQ yang berbeda) sehingga tersedia sejumlah m sub-grup dengan $m \geq 20$.

Selanjutnya, untuk maksud tersebut, kita gunakan statistik EV dan EVV . Kedua statistik ini, seperti halnya GV dan VV , saling komplementer; yang satu melengkapi yang lain. Oleh karena itu, sangat dianjurkan agar kedua-duanya digunakan bersama-sama. Di bawah ini dikemukakan langkah-langkah pengontrolan dengan menggunakan EV . Sebagai catatan, mengingat distribusi sampling EV sulit diidentifikasi, nilai UCL baik di Tahap I maupun Tahap II ditentukan dengan menggunakan formula yang dianjurkan Montgomery (2001) yakni,

$$UCL = E(EV) + K\sqrt{VAR(EV)}.$$

Sekali lagi, $K = 2$ atau 3 yang bersesuaian dengan $PFA = 0,05$ atau $0,0027$. Di sini, $E(EV)$ dan $VAR(EV)$ adalah *mean* dan variansi dari statistik EV . Dalam praktik, kedua parameter ini ditaksir berturut-turut oleh rata-rata dan variansi berdasarkan HDS yang diperoleh di akhir Tahap I.

Tahap I

Langkah 1: Ambil data dari m buah sub-grup yang berbeda dan saling bebas (yang merupakan gabungan dari beberapa proses). Data sub-grup ke- k berupa matriks data berukuran $(n_k \times p_k)$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p_k}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k 1}^k & \cdots & x_{n_k p_k}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Di sini n_k ukuran sub-grup (banyaknya unit sampel) dan p_k banyaknya variable (CTQ). Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit

sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n_k dan j dari 1 sampai dengan p_k .

- Langkah 2:** Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_{p_k}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}^k.$$

- Langkah 3:** Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^T, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip_k}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

- Langkah 4:** Hitung $|S^1|, |S^2|, \dots, |S^m|$ yakni determinan* dari matriks-matriks $S^1, S^2, \dots, S^m$.

- Langkah 5:** Hitung $EV^1, EV^2, \dots, EV^m$ dengan $EV^k = \sqrt{|S^k|}$; $k = 1, 2, \dots, m$.

- Langkah 6:** Hitung $\bar{EV} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m EV^k$; rata-rata dari $EV^1, EV^2, \dots, EV^m$.

- Langkah 7:** Hitung $s_{EV}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (EV^k - \bar{EV})^2$; variansi dari $EV^1, EV^2, \dots, EV^m$.

- Langkah 8:** Hitung $UCL = \bar{EV} + K s_{EV}$ dengan $K = 2$ atau 3 (sesuai PFA = 0,05 atau 0,0027).

- Langkah 9:** Buatlah diagram kontrol EV dengan memplot nilai statistik $EV^1, EV^2, \dots, EV^m$ bersama nilai UCL pada satu diagram.

- Langkah 10:** Misalkan ada M buah statistik diantara $EV^1, EV^2, \dots, EV^m$ yang nilainya tidak melebihi UCL. Jadi, $M \leq m$. Dalam hal $M < m$, hitunglah $\bar{EV}_{HDS}$ dan $s(EV)_{HDS}^2$ yakni rata-rata dan variansi dari semua EV yang berada di daerah kontrol (nilainya kurang dari UCL). Bila $M = m$, kita gunakan $\bar{EV}$ yang dihasilkan pada Langkah 6 dan s_{EV}^2 yang dihasilkan pada Langkah 7 sebagai $\bar{EV}_{HDS}$ dan $s(EV)_{HDS}^2$.

Contoh berikut ini diharapkan dapat memperjelas pelaksanaan kesepuluh langkah tersebut di atas.

Contoh 12.2

Pada semester pertama, tahun pertama, di sebuah Prodi disajikan dua kelompok matakuliah yakni kelompok sains sosial (SS) dan kelompok sains natural (SN). Kelompok pertama terdiri

atas 3 matakuliah A, B dan C. Sedangkan kelompok kedua terdiri atas 5 matakuliah D, E, F, G dan H. Manajemen Prodi bermaksud melakukan pengontrolan MPV untuk setiap kelompok matakuliah. Namun, terbentur dengan kendala di mana Tahap I tidak dapat dilaksanakan dengan baik. Penyebabnya adalah ketersediaan data hasil observasi terhadap sub-grup dari kedua kelompok SS dan SN. Untuk kelompok SS hanya tersedia data 14 (kurang dari 20) sub-grup. Begitu pula dengan kelompok SN di mana hanya tersedia data 11 sub-grup.

Karena kedua kelompok matakuliah itu merupakan kelompok sejenis (data berupa skor nilai; tanpa satuan), namun dengan CTQ yang berbeda, maka kita dapat melakukan pengontrolan MPV kedua kelompok tersebut sekaligus dengan cara menggabungkan nilai *EV* setiap sub-grup pada kedua kelompok itu. Jadi, tersedia $m = 25$ nilai *EV*; 14 buah nilai *EV* berasal dari sub-grup pada kelompok SS ditambah 11 dari sub-grup kelompok SN.

Mengingat data mentah yang terlampau banyak, sementara yang sangat diperlukan untuk Tahap I adalah data tentang matriks kovariansi setiap sub-grup, maka data mentah tidak ditampilkan di buku ini. Adapun data kedua puluh lima matriks kovariansi disajikan pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 di Bab 16. Oleh karena itu, kita langsung ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi setiap sub-grup

Data 14 buah matriks kovariansi dari kelompok SS disajikan pada Tabel 16.5. Sedangkan data 11 buah matriks kovariansi dari kelompok SN diberikan pada Tabel 16.6.

*Langkah 4: Menghitung *GV**

Hasil perhitungan nilai *GV* untuk setiap matriks kovariansi pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 dapat dibaca pada kolom kedua dan keenam, Tabel 12.1, berikut.

Tabel 12.1. Nilai *GV* dan *EV*

No.	<i>GV</i>	<i>EV</i>	UCL	No.	<i>GV</i>	<i>EV</i>	UCL
1	0,00408	0,15974	0,25340	14	0,00156	0,11591	0,25340
2	0,00053	0,08075	0,25340	15	0,00861	0,20497	0,25340
3	0,00167	0,11858	0,25340	16	0,00302	0,14449	0,25340
4	0,00222	0,13054	0,25340	17	0,00552	0,17678	0,25340
5	0,00078	0,09212	0,25340	18	0,00755	0,19621	0,25340
6	0,00115	0,10468	0,25340	19	0,00808	0,20066	0,25340
7	0,00151	0,11475	0,25340	20	0,00654	0,18697	0,25340
8	0,00326	0,14821	0,25340	21	0,00202	0,12635	0,25340
9	0,00272	0,13958	0,25340	22	0,01861	0,26500	0,25340
10	0,00125	0,10764	0,25340	23	0,01075	0,22072	0,25340
11	0,00046	0,07709	0,25340	24	0,00101	0,10038	0,25340
12	0,00131	0,10948	0,25340	25	0,01679	0,25609	0,25340
13	0,00339	0,15022	0,25340				

*Langkah 5: Menghitung *EV**

Nilai EV untuk setiap matriks kovariansi pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 dapat dibaca pada Tabel 12.1, kolom ketiga dan ketujuh.

Langkah 6: Menghitung $\overline{EV}$

Rata-rata dari semua nilai EV pada Tabel 12.1 adalah $\overline{EV} = 0,14912$.

Langkah 7: Menghitung s_{EV}^2

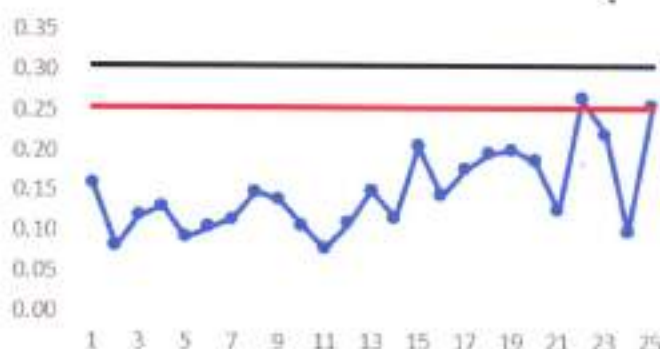
Variansi dari semua nilai EV pada Tabel 12.1 adalah $s_{EV}^2 = 0,00272$. Sedangkan deviasi standarnya, $s_{EV} = 0,05214$.

Langkah 8: Menghitung UCL

$UCL = \overline{EV} + Ks_{EV}$. Jadi, untuk $PFA = 0,0027$, $UCL = \overline{EV} + 3s_{EV} = 0,30554$. Sedangkan untuk $PFA = 0,05$, $UCL = \overline{EV} + 2s_{EV} = 0,25340$. UCL untuk setiap sub-grup dengan $PFA = 0,05$ dapat dilihat di kolom keempat dan kedelapan pada Tabel 12.1.

Langkah 9: Membuat diagram kontrol EV

Jika data nilai EV dan UCL pada Tabel 12.1 diplot pada diagram yang sama, maka akan dihasilkan diagram kontrol EV seperti tampak pada Gambar 12.1.



Gambar 12.1. Diagram EV pada Tahap I untuk Contoh 12.2

Pada gambar ini, garis lurus berwarna merah adalah UCL untuk $PFA = 0,05$ ($K = 2$). Sedangkan yang berwarna hitam adalah UCL untuk $PFA = 0,0027$ ($K = 3$).

Langkah 10: Menentukan HDS

Gambar di atas menunjukkan bahwa;

1. Untuk $PFA = 0,0027$ atau $K = 3$, semua sub-grup berada di dalam daerah kontrol. Artinya, semua sub-grup itu berupa *HDS*. Namun, untuk $PFA = 0,05$ atau $K = 2$, sub-grup No. 22 dan No. 25 berada di luar daerah kontrol. Dalam hal ini, *HDS* terdiri atas semua sub-grup kecuali No. 22 dan No. 25.

2. Dengan menggunakan $PFA = 0,05$, HDS ini memberikan $\overline{EV}_{HDS}$ dan $s(EV)_{HDS}^2$ sebagai berikut; $\overline{EV}_{HDS} = 0,13943$ dan $s(EV)_{HDS}^2 = 0,00174$. Adapun deviasi standarnya $s(EV)_{HDS} = 0,04168$. Nilai rata-rata dan deviasi standar inilah yang akan kita gunakan selanjutnya pada Tahap II.

Tahap II

Sekali lagi, dengan $PFA = 0,05$, di akhir Tahap I kita peroleh $\overline{EV}_{HDS} = 0,13943$ dan deviasi standar $s(EV)_{HDS} = 0,04168$. Dengan menggunakan kedua statistik ini, kita siap melaksanakan Tahap II dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Pengontrolan MPV untuk setiap proses yang terlibat dalam Tahap I di atas dimulai dengan mengumpulkan data tentang proses tersebut dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data pada kolom (variabel) ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansinya,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung $|S|$; determinan matriks S .

Langkah 5: Hitung $EV = \sqrt[p]{|S|}$.

Langkah 6: Hitung $UCL = \overline{EV}_{HDS} + Ks(EV)_{HDS}$ dengan $K = 2$ atau 3 (sesuai $PFA = 0,05$ atau $0,0027$).

Langkah 7: Buatlah diagram kontrol EV dengan memplot nilai EV yang diperoleh pada Langkah 5 di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 8: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $EV < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan proses berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai EV berada di luar daerah kontrol, maka ini adalah sinyal/alarm yang menandakan proses berada dalam keadaan OOC. Pada saat itu perlu dicek apakah sinyal tersebut berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, pengontrolan proses berikutnya dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis untuk mencari akar penyebab terjadinya OOC.

Pada contoh di bawah ini pelaksanaan langkah-langkah Tahap II di atas akan diperjelas.

Contoh 12.3

Contoh ini adalah contoh pengontrolan di Tahap II sebagai kelanjutan Tahap I pada Contoh 12.2. Pengontrolan pertama dilaksanakan untuk mengontrol proses belajar mengajar kelompok SS. Kemudian dilanjutkan dengan pengontrolan kedua sampai dengan kelima, masing-masing untuk mengontrol proses belajar mengajar kelompok SN. Seperti pada Contoh 12.2, di sini pun kita langsung ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Data 1 buah matriks kovariansi dari kelompok SS disajikan pada Tabel 16.7 Sedangkan data 4 buah matriks kovariansi dari kelompok SN diberikan pada Tabel 16.8 di Bab 16.

Langkah 4: Menghitung GV

Hasil perhitungan nilai GV dapat dilihat di kolom kedua pada tabel berikut.

Tabel 12.2. Nilai GV , EV dan UCL pada Tahap II

No.	GV	EV	UCL
1	0,00242	0,13418	0,22279
2	0,00152	0,11491	0,22279
3	0,01667	0,25543	0,22279
4	0,00616	0,18330	0,22279
5	0,00825	0,20205	0,22279

Langkah 5: Menghitung EV

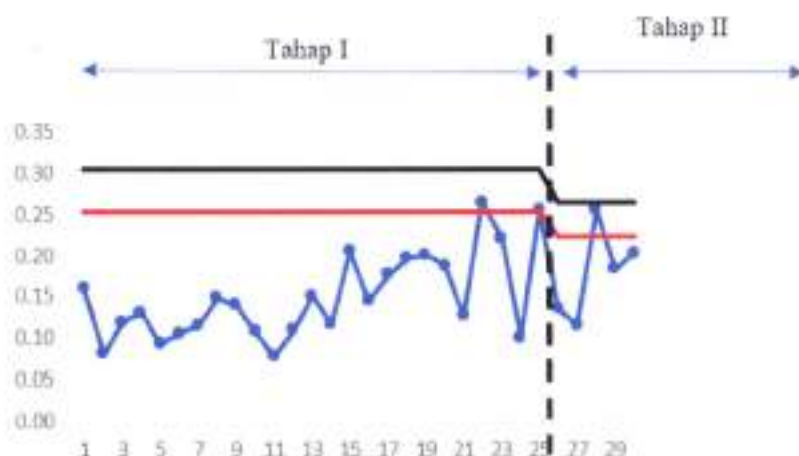
Hasil perhitungan $EV = \sqrt[5]{|S|}$ dapat dilihat pada Tabel 12.2 kolom ketiga.

Langkah 6: Menghitung UCL

Pada Tahap II ini $UCL = \overline{EV}_{HDS} + Ks(EV)_{HDS}$. Sedangkan, dari Tahap I telah kita peroleh $\overline{EV}_{HDS} = 0,13943$ dan $s(EV)_{HDS}^2 = 0,00174$. Jadi, untuk $PFA = 0,0027$, $UCL = \overline{EV}_{HDS} + 3s(EV)_{HDS} = 0,26447$. Sedangkan untuk $PFA = 0,05$, $UCL = \overline{EV}_{HDS} + 2s(EV)_{HDS} = 0,22279$. UCL untuk setiap sub-group dengan $PFA = 0,05$ dapat dilihat di kolom keempat pada Tabel 12.2.

Langkah 7: Membuat diagram kontrol EV

Jika nilai EV , nilai UCL untuk $PFA = 0,0027$, dan nilai UCL untuk $PFA = 0,05$ kita plot pada diagram yang sama, maka kita peroleh diagram kontrol EV Tahap I (nomor 1 – 25) dan Tahap II (nomor 26 – 30) berikut ini.



Gambar 12.2. Diagram kontrol EV Tahap I dan Tahap II untuk Contoh 12.2-12.3

Garis lurus berwarna hitam adalah UCL untuk $PFA = 0,0027$. Sedangkan yang berwarna merah adalah UCL untuk $PFA = 0,05$.

Langkah 8: Proses aman?

Gambar 12.2 di atas menunjukkan bahwa, untuk $PFA = 0,05$, proses belajar mengajar kelompok matakuliah sains natural (No. 28) berada dalam keadaan tak terkontrol. Maka diperlukan penyelidikan lebih lanjut untuk menemukan akar penyebab mengapa hal itu terjadi untuk kemudian mengupayakan agar kelas tersebut berada kembali dalam keadaan terkontrol.

2. Pengontrolan dengan statistik EVV

Langkah-langkah pengontrolan variabilitas proses dengan menggunakan statistik EVV hampir sama dengan langkah-langkah di atas yang menggunakan statistik EV ; baik di Tahap I maupun di Tahap II. Bedanya hanya pada perhitungan statistik pengontrol (dalam hal ini EVV) dan penentuan UCL .

UCL pada pengontrolan dengan menggunakan EVV baik di Tahap I maupun Tahap II ditentukan dengan menggunakan formula,

$$UCL = E(EVV) + K\sqrt{VAR(EVV)}$$

dengan $K = 2$ atau 3 sesuai $PFA = 0,05$ atau $0,0027$. Di sini, $E(EVV)$ dan $VAR(EVV)$ adalah *mean* dan variansi dari statistik EVV . Dan, dalam praktik, kedua parameter ini ditaksir berturut-turut oleh rata-rata dan variansi dari HDS yang diperoleh di akhir Tahap 1. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

Tahap 1

Langkah 1: Ambil data dari m buah sub-grup yang berbeda dan saling bebas (yang merupakan gabungan dari beberapa proses). Data sub-grup ke- k berupa matriks data berukuran $(n_k \times p_k)$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^k & \cdots & x_{1p_k}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k1}^k & \cdots & x_{n_k p_k}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, m.$$

Di sini n_k ukuran sub-grup (banyaknya unit sampel) dan p_k banyaknya variable (CTQ). Elemen baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks itu adalah x_{ij}^k yakni data pada sub-grup ke- k tentang variabel ke- j yang diberikan oleh unit sampel ke- i . Di sini, i bergerak dari 1 sampai dengan n_k dan j dari 1 sampai dengan p_k .

Langkah 2: Pada setiap sub-grup, hitunglah vektor rata-rata. Vektor rata-rata untuk sub-grup ke- k adalah,

$$\bar{X}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \vdots \\ \bar{X}_{p_k}^k \end{pmatrix} \text{ dengan } \bar{X}_j^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}^k.$$

Langkah 3: Pada setiap sub-grup, hitunglah matriks kovariansinya. Matriks kovariansi untuk sub-grup ke- k adalah,

$$S^k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)(X_i^k - \bar{X}^k)^t, \text{ dengan}$$

$$X_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \vdots \\ x_{ip_k}^k \end{pmatrix} \text{ adalah vektor baris ke-}i \text{ dari matriks data di Langkah 1.}$$

Langkah 4: Hitung $VV^k = \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{i=1}^{p_k} (s_{ij}^k)^2$; s_{ij}^k adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari S^k . Jadi, VV^k adalah jumlah kuadrat semua elemen dari S^k ; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 5: Hitung $EVV^k = \frac{1}{p_k} VV^k$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Langkah 6: Hitung $\bar{EVV} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m EVV^k$; rata-rata dari $EVV^1, EVV^2, \dots, EVV^m$.

- Langkah 7:** Hitung $s_{EVV}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (EVV^k - \overline{EVV})^2$; variansi dari $EVV^1, EVV^2, \dots, EVV^m$.
- Langkah 8:** Hitung $UCL = \overline{EVV} + K s_{EVV}$ dengan $K = 2$ atau 3 (sesuai $PFA = 0,05$ atau $0,0027$).
- Langkah 9:** Buatlah diagram kontrol EVV dengan memplot nilai statistik $EVV^1, EVV^2, \dots, EVV^m$ bersama nilai UCL pada satu diagram.
- Langkah 10:** Misalkan ada M buah statistik diantara $EVV^1, EVV^2, \dots, EVV^m$ yang nilainya tidak melebihi UCL . Jadi, $M \leq m$. Dalam hal $M < m$, hitunglah $\overline{EVV}_{HDS}$ dan $s(EVV)_{HDS}^2$ yakni rata-rata dan variansi dari semua EVV yang berada di daerah kontrol (yang nilainya kurang dari UCL). Bila $M = m$, kita gunakan $\overline{EVV}$ yang dihasilkan pada *Langkah 6* dan s_{EVV}^2 yang dihasilkan pada *Langkah 7* sebagai $\overline{EVV}_{HDS}$ dan $s(EVV)_{HDS}^2$.

Contoh 12.4

Masalah pada Contoh 12.2 sekarang akan kita selesaikan dengan menggunakan statistik pengontrol EVV . Dan, seperti pada Contoh 12.2, kita langsung ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi setiap sub-grup

Data 14 buah matriks kovariansi dari kelompok SS data 11 buah matriks kovariansi dari kelompok SN diberikan dapat dilihat pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 di Bab 16.

Langkah 4: Menghitung EVV untuk setiap sub-grup

Hasil perhitungan nilai EVV untuk setiap matriks kovariansi pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 dapat dibaca pada kolom kedua dan keenam, Tabel 12.3, berikut.

Tabel 12.3. Nilai EVV dan UCL

No.	EVV	UCL	No.	EVV	UCL
1	0,18510	0,06170	14	0,07055	0,02352
2	0,05985	0,01995	15	10,97201	3,65734
3	0,06704	0,02235	16	2,05975	0,68658
4	0,11491	0,03830	17	4,93649	1,64550
5	0,07837	0,02612	18	7,53281	2,51094
6	0,06739	0,02246	19	4,11246	1,37082
7	0,05891	0,01964	20	5,51039	1,83680
8	0,13394	0,04465	21	3,67682	1,22561
9	0,09827	0,03276	22	11,56100	3,85367
10	0,12190	0,04063	23	6,77300	2,25767
11	0,02642	0,00881	24	5,25356	1,75119
12	0,06276	0,02092	25	2,19382	0,73127
13	0,12652	0,04217			

Langkah 5: Menghitung EVV

Nilai EVV untuk setiap matriks kovariansi pada Tabel 16.5 dan Tabel 16.6 dapat dibaca pada Tabel 12.3, kolom ketiga dan ketujuh.

Langkah 6: Menghitung $\overline{EVV}$

Rata-rata dari semua nilai EVV pada Tabel 12.3 adalah $\overline{EVV} = 0,87805$.

Langkah 7: Menghitung s_{EVV}^2

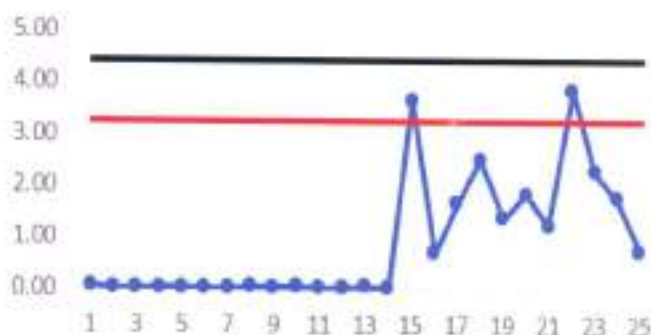
Variansi dari semua nilai EVV pada Tabel 12.3 adalah $s_{EVV}^2 = 1,41271$. Sedangkan deviasi standarnya, $s_{EVV} = 1,18858$.

Langkah 8: Menghitung UCL

$UCL = \overline{EVV} + Ks_{EVV}$ dengan $K = 2$ atau 3 (sesuai $PFA = 0,05$ atau $0,0027$). Untuk $PFA = 0,0027$, $UCL = \overline{EVV} + 3s_{EVV} = 4,44378$. Sedangkan untuk $PFA = 0,05$, $UCL = \overline{EVV} + 2s_{EVV} = 3,25521$. UCL untuk setiap sub-grup dengan $PFA = 0,05$ dapat dilihat di kolom keempat dan kedelapan pada Tabel 12.3.

Langkah 9: Membuat diagram kontrol EVV

Plot data nilai EVV dan UCL pada Tabel 12.3 pada diagram yang sama menghasilkan diagram kontrol EVV seperti tampak pada Gambar 12.3.



Gambar 12.3. Diagram kontrol EVV Tahap 1 untuk Contoh 12.4

Pada gambar ini, garis lurus berwarna merah adalah UCL untuk $PFA = 0,05$ ($K = 2$). Sedangkan yang berwarna hitam adalah UCL untuk $PFA = 0,0027$ ($K = 3$).

Langkah 10: Menentukan HDS

Gambar di atas menunjukkan bahwa;

1. Untuk $PFA = 0,0027$ atau $K = 3$, semua sub-grup berada di dalam daerah control. Artinya, semua sub-grup itu berupa *HDS*. Namun, untuk $PFA = 0,05$ atau $K = 2$, sub-grup No. 15

dan No. 22 berada di luar daerah kontrol. Dalam hal ini, HDS terdiri atas semua sub-grup kecuali No. 15 dan No. 22.

2. Dengan menggunakan $PFA = 0,05$, HDS ini memberikan $\overline{EVV}_{HDS}$ dan $s(EVV)_{HDS}^2$ sebagai berikut; $\overline{EVV}_{HDS} = 0,62784$ dan $s(EVV)_{HDS}^2 = 0,72211$. Sedangkan deviasi standarnya $s(EVV)_{HDS} = 0,84977$. Nilai rata-rata dan deviasi standar ini selanjutnya akan kita gunakan pada Tahap II.

Tahap II

Di akhir Tahap I kita peroleh $\overline{EVV}_{HDS} = 0,62784$ dan deviasi standar $s(EVV)_{HDS} = 0,84977$. Kedua statistik ini selanjutnya kita gunakan untuk melaksanakan Tahap II.

Langkah 1: Pengontrolan MPV setiap proses yang terlibat dalam pelaksanaan Tahap I dimulai dengan mengumpulkan data tentang proses tersebut dalam bentuk matriks seperti berikut,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

— *Langkah 2:* Hitung vektor rata-rata dari matriks data itu,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$$

dengan $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ rata-rata data pada kolom (variabel) ke- j .

Langkah 3: Hitung matriks kovariansinya,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$$

dengan X_i adalah vektor baris ke- i , yakni

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung VV ; jumlah kuadrat semua elemen dari matriks S .

Langkah 5: Hitung $EVV = \frac{1}{p} VV$.

Langkah 6: Hitung $UCL = \overline{EVV}_{HDS} + Ks(EVV)_{HDS}$; $K = 2$ atau 3 sesuai $PFA = 0,05$ atau $0,0027$.

Langkah 7: Buatlah diagram kontrol EVV dengan memplot nilai EVV yang diperoleh pada *Langkah 5* di atas, bersama nilai UCL pada diagram yang sama.

Langkah 8: Jika diagram kontrol berada dalam keadaan terkontrol, artinya $EVV < UCL$, lanjutkan dengan pengontrolan proses berikutnya dan mulai lagi dengan *Langkah 1*. Jika di suatu saat pengontrolan nilai EVV berada di luar daerah kontrol, maka ini adalah sinyal/alarm yang menandakan proses berada dalam keadaan OOC. Pada saat itu perlu dicek apakah sinyal tersebut berupa *false alarm* atau *true alarm*. Jika *false alarm*, pengontrolan proses berikutnya dilanjutkan dengan memulai lagi *Langkah 1*. Jika *true alarm*, maka harus dilakukan analisis untuk mencari akar penyebab mengapa terjadi OOC.

Contoh 12.5

Contoh ini memperlihatkan pengontrolan di Tahap II sebagai kelanjutan Tahap I pada Contoh 12.4. Seperti pada Contoh 12.3, pengontrolan pertama dilaksanakan untuk mengontrol proses belajar mengajar kelompok SS. Kemudian dilanjutkan dengan pengontrolan kedua sampai dengan kelima, masing-masing untuk mengontrol proses belajar mengajar kelompok SN. Seperti halnya Contoh 12.4, di sini pun kita langsung ke *Langkah 3*.

Langkah 3: Menghitung matriks kovariansi

Data 1 buah matriks kovariansi dari kelompok SS dan data 4 buah matriks kovariansi dari kelompok SN disajikan pada Tabel 16.7 dan Tabel 16.8.

Langkah 4: Menghitung VV

Hasil perhitungan nilai VV dapat dilihat pada kolom kedua, Tabel 12.4, berikut.

Tabel 12.4. Nilai VV , EVV dan UCL pada Tahap II

No.	VV	EVV	UCL
1	0,12208	0,04069	2,32739
2	2,99632	0,99877	2,32739
3	4,84000	1,61333	2,32739
4	5,36421	1,78807	2,32739
5	7,75556	2,58519	2,32739

Langkah 5: Menghitung EVV

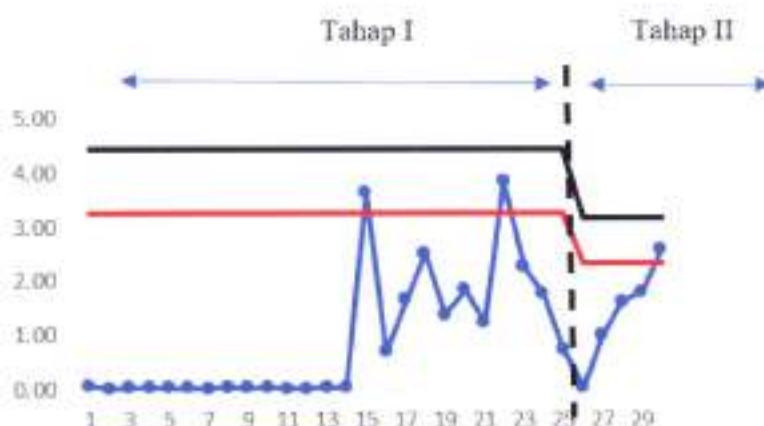
Hasil perhitungan EVV dapat dilihat pada Tabel 12.4 kolom ketiga.

Langkah 6: Menghitung UCL

Pada Tahap II ini $UCL = \overline{EVV}_{HDS} + Ks(EVV)_{HDS}$. Sedangkan, dari Tahap I telah kita peroleh $\overline{EVV}_{HDS} = 0,62784$ dan $s(EVV)_{HDS}^2 = 0,72211$ dan deviasi standarnya $s(EVV)_{HDS} = 0,84977$. Jadi, untuk $PFA = 0,0027$, $UCL = \overline{EVV}_{HDS} + 3s(EV)_{HDS} = 3,17716$. Sedangkan untuk $PFA = 0,05$, $UCL = \overline{EV}_{HDS} + 2s(EV)_{HDS} = 2,32739$. UCL untuk setiap sub-grup dengan $PFA = 0,05$ dapat dilihat di kolom keempat pada Tabel 12.4.

Langkah 7: Membuat diagram kontrol EVV

Jika nilai EVV , nilai UCL untuk $PFA = 0,05$, dan nilai UCL untuk $PFA = 0,0027$ kita plot pada diagram yang sama, maka kita peroleh diagram kontrol EVV Tahap I (nomor 1 – 25) dan Tahap II (nomor 26 – 30) berikut ini.



Gambar 12.4. Diagram kontrol EVV Tahap I dan Tahap II untuk Contoh 12.2-12.3

Garis lurus berwarna hitam adalah UCL untuk $PFA = 0,0027$. Sedangkan yang berwarna merah adalah UCL untuk $PFA = 0,05$.

Langkah 8: Proses aman?

Gambar 12.4 menunjukkan bahwa, untuk $PFA = 0,05$, proses belajar mengajar kelompok matakuliah sains natural dengan nomor 30 berada dalam keadaan tak terkontrol. Oleh karena itu, perlu dilakukan penyelidikan lebih lanjut untuk mengetahui akar penyebab terjadinya OOC untuk kemudian memperbaiki keadaan.

BAGIAN IV

PROSES KOMPUTASI

- Proses komputasi diperlukan untuk menghitung 2 (dua) buah besaran/nilai yakni (1) nilai statistik pengontrol, dan (2) nilai batas kontrol
- Menghitung kedua nilai/besaran itu cukup dengan menggunakan MS Excel
- Dalam menghitung nilai statistik pengontrol diperlukan keterampilan melakukan operasi matriks seperti operasi transpose, menghitung determinan, menentukan inversi matriks, dan perkalian dua matriks. Semua operasi matriks itu dapat dilaksanakan dengan mudah berkat bantuan MS Excel.

BAB 13

BATAS KONTROL DALAM MS EXCEL

Batas kontrol adalah alat perlengkapan yang sangat vital bagi para profesional bidang Q-STEM. Sekali lagi Q-STEM adalah singkatan dari *Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering, dan Quality Management*. Alat itu sangat menentukan dalam melaksanakan pengontrolan kualitas proses. Di zaman lampau, batas kontrol dan tabel statistik selalu menyertai para profesional dan peneliti ke mana pun mereka pergi. Di zaman modern sekarang ini, orang tidak perlu repot-repot membawa alat-alat itu. Bahkan tidak perlu mempunyai tabel statistik. Semuanya ada di ujung jari tangan. Yang diperlukan hanyalah ketrampilan memainkan jari tangan tersebut dalam membuat tabel statistik. Dan, untuk itu, cukup dengan bantuan MS Excel.

Di dalam buku ini, mulai Bab 4 sampai dengan Bab 12, para pembaca selalu dihadapkan kepada masalah menentukan batas-batas kontrol baik LCL maupun UCL. Keterampilan menghitung LCL atau UCL dengan baik dan benar akan sangat menentukan kemanfaatan buku ini. Akan tetapi, LCL dan UCL memerlukan nilai kuantil dari suatu distribusi tertentu yang sesuai dengan perilaku proses. Khususnya kuantil dari keempat distribusi berikut: distribusi Beta, distribusi Chi-Squared, distribusi Fisher (F), dan distribusi Normal. Bab ini akan menjelaskan bagaimana caranya mendapatkan kuantil dari keempat distribusi tersebut untuk PFA (α) yang diinginkan.

1. Kuantil distribusi Beta

Pada Contoh 4.2, Bab 4, kita berhadapan dengan masalah menentukan UCL yang nilainya sama dengan kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan $u = p/2$ dan $v = (m-p-1)/2$, untuk PFA sebesar α . Faktor kelipatannya adalah $\frac{(m-1)^2}{m}$. Dengan menggunakan MS Excel, langkah-langkah pencarian nilai kuantil tersebut adalah sebagai berikut.

1. Masuklah ke dalam sistem MS Excel
2. Pilih salah satu Sheet sebagai tempat kerja
3. Letakkan kursor pada salah satu sel
4. Pada sel tersebut ketiklah “=BETA.INV($1 - \alpha, u, v$)” (tanpa tanda “ dan ”) dengan u dan v adalah derajat kebebasan pertama dan kedua.
5. Klik ENTER. Maka pada sel itu akan muncul nilai kuantil yang dicari.

Contoh 13.1.

Untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, maka kuantil ke-99,73% dari distribusi Beta dengan derajat kebebasan 2 dan 12 diperoleh sebagai berikut.

$$\text{Nilai kuantil ke-99,73\% adalah } "= \text{BETA.INV}(0,9973,2,12)" = 0,47899$$

Dengan demikian, karena $m = 29$, maka $\text{UCL} = (0,47899) \cdot (29-1)^2/29 = 12,94912$.

Catatan:

Pernyataan "Kuantil ke-0,9973 = 0,47899" identik dengan pernyataan berikut,

$$\Pr(X \leq 0,47899) = 0,9973.$$

dengan $X \sim \text{Beta}(2,12)$. Artinya, probabilitas bahwa nilai X tidak melebihi 0,47899 adalah sebesar 0,9973. Di sini, nilai PFA sebesar $\alpha = 0,0027$ atau nilai probabilitas sebesar 0,9973 ditentukan sejak awal oleh Divisi Jaminan Kualitas (*Quality Assurance Division*). Lalu dicari nilai x yang memenuhi $\Pr(X \leq x) = 0,9973$. Dan, diperoleh $x = 0,47899$.

Proses mencari nilai x untuk suatu nilai α yang diberikan adalah proses pembuatan tabel statistik distribusi Beta dengan derajat kebebasan u dan v untuk beberapa α . Nah, dengan demikian jelas tampak bahwa kita tidak perlu membawa tabel statistik bersama kita. MS Excel akan memberikan kepada kita nilai x untuk suatu nilai α yang diberikan sehingga $\Pr(X \leq x) = 1 - \alpha$.

Kalau begitu, kita bisa bertanya sebaliknya. Jika diberikan nilai x , berapakah nilai α sehingga $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$? Jawabannya diberikan oleh MS Excel dengan mengetik (kalimat antara tanda " dan ") "`=BETA.DIST(x,u,v,TRUE,0,1)`" lalu klik ENTER.

Contoh 13.2.

Jika $x = 0,25$ dan derajat kebebasan $u = 2$ dan $v = 12$, berapakah nilai α sehingga $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$? Jawabannya diberikan dengan mengetik,

$$"\text{=BETA.DIST}(0,25,2,12,\text{TRUE},0,1)"$$

Maka solusinya adalah $(1 - \alpha) = 0,87329$. Atau $\alpha = 0,12671$.

2. Kuantil distribusi Chi-Squared

Masih di dalam Bab 4, Contoh 4.1, kita berhadapan dengan masalah menentukan UCL untuk PFA sebesar α . Pada contoh itu, UCL sama dengan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Chi-Squared dengan derajat kebebasan k . Dengan menggunakan MS Excel, kuantil tersebut dapat diperoleh sebagai berikut.

1. Masuklah ke dalam sistem MS Excel
2. Pilih salah satu **Sheet** sebagai tempat kerja
3. Letakkan kursor pada salah satu sel
4. Pada sel tersebut ketikkan "`=CHINV( $\alpha, k$ )`" (tentu tanpa tanda " dan ").
5. Klik ENTER. Maka pada sel itu akan muncul nilai UCL yang dicari.

Contoh 13.3.

Untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$ dan derajat kebebasan $k = 5$, kita peroleh UCL atau kuantil ke-99,73% sebagai berikut:

$$UCL = "=CHIINV(0.0027,5)" = 18,20514.$$

Catatan:

Di sini, pernyataan " $UCL = 18,20514$ " identik dengan pernyataan,

$$\Pr(T^2 \leq 18,20514) = 0,9973.$$

Artinya, probabilitas bahwa nilai T^2 tidak melebihi 18,20514 adalah sebesar 0,9973. Di sini, nilai PFA sebesar $\alpha = 0,0027$ atau nilai probabilitas sebesar 0,9973 ditentukan sejak awal. Lalu dicari nilai x yang memenuhi $\Pr(T^2 \leq x) = 0,9973$. Dan diperoleh $x = 18,20514$.

Proses mencari nilai x seperti di atas adalah proses pembuatan tabel statistik distribusi Chi-Squared dengan derajat kebebasan k untuk beberapa nilai α . Nah, sekali lagi MS Excel akan memberikan kepada kita nilai x untuk suatu nilai α tertentu sehingga $\Pr(X \leq x) = 1 - \alpha$.

Seperti pada Contoh 13.1, hal yang sebaliknya dapat dipertanyakan. Jika diberikan nilai x , berapakah nilai α yang memenuhi $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$? Di sini $X \sim \chi_k^2$. Untuk derajat kebebasan k , nilai α diberikan oleh MS Excel dengan mengetik " $=CHIDIST(x,k)$ " lalu klik ENTER.

Contoh 13.4.

Jika $x = 10$ dan derajat kebebasan $k = 5$, berapakah nilai α sehingga $\Pr(T^2 \leq x) = (1 - \alpha)$? Jawabannya diberikan dengan mengetik,

$$"\text{=CHIDIST}(10,5)"$$

Maka solusinya adalah $\alpha = 0,07524$.

3. Kuantil distribusi F

Di dalam Bab 4 juga, Contoh 4.3, masalah yang kita hadapi adalah menentukan UCL untuk PFA sebesar α berdasarkan distribusi F . Tepatnya, UCL adalah kelipatan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi F dengan derajat kebebasan p dan $(m - p)$. Faktor kelipatannya adalah $\frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)}$. Dengan menggunakan MS Excel, kuantil tersebut dapat diperoleh melalui kelima langkah seperti pada kasus kuantil distribusi Beta dan kasus kuantil distribusi Chi-Squared, kecuali langkah keempat. Untuk lebih jelasnya, langkah keempat menjadi,

Pada sel tersebut ketiklah " $=F.INV(1 - \alpha, p, m - p)$ " (tanpa tanda " $=$ " dan " $)$ "),

Contoh 13.5.

Pada Contoh 4.3, $p = 4$ dan $m = 28$. Jadi, distribusi F yang kita gunakan berderajat kebebasan $p = 4$ dan $(m - p) = 28 - 4 = 24$. Nah, untuk PFA sebesar $\alpha = 0,0027$, maka kuantil ke-99,73% dari distribusi itu diberikan oleh MS Excel sebagai berikut.

$$\text{Kuantil ke-99,73\%} = \text{"=F.INV(0.9973,4,24)"} = 25,70845.$$

Catatan:

Dengan menuliskan x sebagai kuantil ke-99,73% tersebut di atas, maka pernyataan "kuantil ke-0,9973 = 25,70845" identik dengan pernyataan berikut,

$$\Pr(X \leq 25,70845) = 0,9973$$

di mana $X \sim F(4,24)$. Artinya, X berdistribusi F dengan derajat kebebasan 4 dan 24.

Pada persamaan di atas, nilai α diketahui dan nilai x dicari sehingga memenuhi $\Pr(X \leq x) = 1 - \alpha$. Dengan mengganti nilai α dan kedua derajat kebebasan, maka akan kita peroleh tabel statistik distribusi F .

Seperti pada contoh-contoh sebelumnya, kita pun bisa melakukan hal yang sebaliknya. Jika nilai x diketahui, dan $X \sim F_{\alpha,p}$, nilai α yang memenuhi $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$ dapat kita cari. Untuk itu, di dalam sistem MS Excel cukup kita tulis " $\text{=F.DIST}(x,\mu,v,\text{TRUE})$ " lalu klik ENTER.

Contoh 13.6.

Jika $x = 3,37936$ dan derajat kebebasan $\mu = 4$ dan $v = 24$, berapakah nilai α yang memenuhi $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$? MS Excel memberikan jawaban begini,

$$\text{"=F.DIST(3.37936,4,24,TRUE)"}'$$

Maka solusinya adalah $\alpha = 0,975$.

4. Kuantil distribusi Normal

Kuantil distribusi Normal adalah kuantil yang paling banyak dan paling sering dicari, terutama untuk $\alpha = 1\%$, $2,5\%$ dan 5% . Cara mendapatkan kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari distribusi Normal dengan mean 0 dan deviasi standar 1 dengan menggunakan MS Excel, cukup dengan mengetik " $\text{=NORM.INV}(1 - \alpha, 0, 1)$ " lalu, klik ENTER.

Contoh 13.7.

Akan kita cari kuantil ke- $(1 - \alpha)$ untuk $\alpha = 0,00135$; $0,01$; $0,025$ dan $0,05$. Solusi yang diberikan oleh MS Excel adalah sebagai berikut.

1. Untuk $\alpha = 0,00135$;

$$\text{Kuantil ke-99,865\%} = \text{=NORM.INV(0,99865,0,1)} = 2,99998.$$

2. Untuk $\alpha = 0,01$;

$$\text{Kuantil ke-99\%} = \text{=NORM.INV(0,99,0,1)} = 2,32635.$$

3. Untuk $\alpha = 0,025$;

$$\text{Kuantil ke-975\%} = \text{=NORM.INV(0,975,0,1)} = 1,95996.$$

4. Untuk $\alpha = 0,05$;

$$\text{Kuantil ke-95\%} = -\text{NORM.INV}(0,95,0,1) = 1,64485.$$

Catatan:

Dengan menuliskan x sebagai kuantil ke- $(1 - \alpha)$ dari populasi X yang berdistribusi Normal standar, atau $X \sim N(0,1)$, maka berlaku persamaan berikut,

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \alpha.$$

Nah, pada persamaan ini, jika nilai α diketahui maka nilai x dapat ditentukan. Demikian pula berlaku sebaliknya; jika nilai x diketahui, maka nilai α dapat ditentukan. Dan, dengan menggunakan berbagai nilai α , maka akan kita peroleh tabel statistik distribusi Normal standar. Sedangkan untuk mencari nilai α jika nilai x diketahui, di dalam sistem MS Excel cukup kita tulis,

$$=\text{NORM.DIST}(x,0,1,\text{TRUE})$$

lalu klik ENTER.

Contoh 13.8.

Jika $x = 1$, maka nilai α yang memenuhi $\Pr(X \leq x) = (1 - \alpha)$ diberikan oleh MS Excel setelah kita menulis $=\text{NORM.DIST}(1,0,1,\text{TRUE})$ lalu menekan ENTER. Dan, solusinya adalah $1 - \alpha = 0,84135$. Jadi, $\alpha = 0,15865$ atau 15,865% dan kalau dibulatkan menjadi 16%.

BAB 14

OPERASI MATRIKS DENGAN MS EXCEL

Tak dapat dipungkiri bahwa pengontrolan kualitas proses kompleks, baik pengontrolan MPT maupun pengontrolan MPV, melibatkan banyak sekali rumus matematik dan statistik yang tampak rumit dan jelimet (*complicated*). Nah, penggunaan MS Excel dalam buku ini menunjukkan bahwa semua rumus matematik dan statistik yang tampak rumit dan jelimet itu sesungguhnya mudah dioperasionalkan. Dan, akan lebih mudah lagi apabila pembaca memiliki keterampilan menggunakan MS Excel untuk melakukan berbagai operasi matriks.

Bab ini bertujuan meningkatkan keterampilan para pembaca dalam melakukan berbagai operasi matriks. Keterampilan minimal yang diperlukan meliputi operasi,

1. Transpose matriks
2. Inversi matriks
3. Perkalian 2 matriks
4. Determinan matriks
5. Jumlah kuadrat semua elemen matriks

1. Transpose Matriks

Diskusi di dalam Bab 4 sampai dengan Bab 6 selalu melibatkan tiga buah operasi matriks yakni, (1) operasi untuk mendapatkan transpose dari sebuah matriks atau sebuah vektor, (2) operasi untuk mendapatkan inversi sebuah matriks bujur sangkar, dan (3) operasi untuk mendapatkan hasil perkalian dua buah matriks.

Berikut adalah contoh mendapatkan transpose sebuah matriks.

Contoh 14.1.

Misalkan kepada kita diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dari pelajaran Aljabar Matriks kita tahu bahwa transpose dari A adalah matriks B berikut,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bagaimana cara mendapatkan B dari A dengan menggunakan MS Excel? Mudah sekali. Untuk mendapatkannya, MS Excel memberikan cara sebagai berikut.

1. Di dalam sistem MS Excel, simpan elemen-elemen baris pertama matriks A pada sel A1, B1 dan C1. Sedangkan elemen-elemen baris kedua disimpan pada sel A2, B2 dan C2. Dengan kata lain, semua elemen itu disimpan di sel-sel A1:C2.

	A	B	C	D
1	2	0	1	
2	6	1	3	
3				
4				
5				

2. Sorotlah (*highlight*) sel-sel A1:C2 itu,

	A	B	C	D
1	2	0	1	
2	6	1	3	
3				
4				
5				

3. Tekan Ctrl dan C dalam waktu yang bersamaan. Maka pada batas luar sel-sel A1:C2 akan tampak garis putus-putus yang berkedip seperti di bawah ini,

	A	B	C	D
1	2	0	1	
2	6	1	3	
3				
4				
5				

4. Letakkan kursor di salah satu sel kosong yang dipilih. Misalnya sel kosong itu E1. Lalu, klik PASTE. Kemudian klik PASTE SPECIAL. Setelah itu, klik kotak TRANSPOSE.
5. Klik OK. Maka elemen-elemen matriks B diberikan pada sel-sel E1:F3,

	A	B	C	D	E	F
1	2	0	1		2	6
2	6	1	3		0	1
3					1	3
4						
5						

Pada sel-sel tersebut tampak,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Untuk selanjutnya, transpose dari matriks A ditulis A^t .

2. Inversi Matriks

Operasi untuk mendapatkan inversi sebuah matriks bujur sangkar (matriks di mana banyak baris sama dengan banyak kolom) mudah dilaksanakan dengan menggunakan MS Excel. Caranya akan diperlihatkan pada Contoh 14.2.

Contoh 14.2.

Misalkan kepada kita diberikan matriks A di bawah ini di mana banyak baris = banyak kolom = 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Bagaimana cara mendapatkan matriks A^{-1} yaitu inversi dari A ? Begini caranya,

1. Simpan matriks A di sel-sel A1:C3.
2. Letakkan kursor di sel E1. Lalu *highlight* semua sel-sel E1:G3 yang berukuran sama seperti matriks A yakni 3 baris dan 3 kolom. Kemudian, klik ruang kosong di sebelah kanan ikon f_x . Selanjutnya, di ruang kosong itu ketik " $=MINVERSE(A1:C3)$ ".

3. Tekan Shift dan Ctrl bersama-sama. Sambil menekan Shift dan Ctrl, klik ENTER. Maka matriks A^{-1} berikut diberikan di sel-sel E1:G3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	4	1	1		0,29032	-0,05378	-0,021505	
2	1	3	5		-0,25806	0,01075	0,204301	
3	5	6	1		0,096774	0,204301	-0,11828	
4								
5								

Jadi, matriks A^{-1} adalah,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,29032 & -0,05378 & -0,02151 \\ -0,25806 & 0,01075 & 0,20430 \\ 0,09677 & 0,20430 & -0,11828 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian 2 Matriks

Operasi untuk mendapatkan hasil perkalian dua buah matriks A dan B , hanya bisa dilakukan apabila banyak kolom dari A sama dengan banyak baris dari B . Hasilnya adalah sebuah matriks C dengan banyak baris sama dengan banyak baris dari A dan banyak kolomnya sama dengan banyak kolom dari B . Jadi, jika A terdiri atas p baris dan q kolom, B terdiri atas q baris dan r kolom, maka C terdiri atas p baris dan r kolom.

Contoh 14.3.

Misalkan kepada kita diberikan dua matriks A dan B berikut ini.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bagaimana mendapatkan matriks $C = A \times B$? Cara mendapatkan matriks C dengan MS Excel adalah sebagai berikut.

1. Simpan matriks A di sel-sel A1:C2 dan matriks B di sel-sel E1: H3.

- Letakkan kursor di sel C5. Lalu *highlight* semua sel-sel C5:F6. Kemudian, klik ruang kosong di sebelah kanan ikon f_x . Selanjutnya, di ruang kosong itu ketik “=MMULT(A1:C2,E1:H3)”

VAR.S =MMULT(A1:C2,E1:H3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	0	5		2	2	5	4	
2	1	2	4		4	4	7	9	
3					0	9	1	2	
4									
5									
6									
7									

- Tekan Shift dan Ctrl bersama-sama. Sambil menekan Shift dan Ctrl, klik ENTER. Maka matriks C berikut diberikan di sel-sel C5:F6,

C3 =MMULT(A1:C2,E1:H3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	0	5		2	2	5	4	
2	1	2	4		4	4	7	9	
3					0	9	1	2	
4									
5					2	42	10	16	
6					10	42	23	32	
7									

Jadi, matriks C adalah,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 42 & 10 & 16 \\ 10 & 42 & 23 & 32 \end{pmatrix}.$$

4. Determinan Matriks

Diagram kontrol IGV di Bab 8 dan Bab 10, dan diagram kontrol EV di Bab 12 bertumpu kepada statistik GV yakni determinan dari matriks kovariansi S . Cara menghitung determinan tersebut mudah sekali.

Contoh 14.4.

Misalkan diketahui matriks A berikut ini,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di bawah ini adalah cara menghitung $|A|$ determinan dari A,

- Simpan matriks A di sel-sel A1:C3.
- Letakkan kursor di salah satu sel kosong, misalnya sel E1.
- Di sel itu ketiklah “=MDETERM(A1:C3)”
- Klik ENTER. Maka di E1 muncul nilai determinan yang dicari, $|A| = -93$.

BAGIAN V

RANGKUMAN

- Bagian ini dimulai dengan menyajikan intisari dari seluruh isi buku.
- Dilanjutkan dengan menyajikan berbagai kumpulan data yang digunakan pada contoh-contoh di dalam buku. Dengan demikian, para pembaca dapat melakukan verifikasi terhadap proses perhitungan nilai statistik pengontrol dan nilai batas control.
- Bab terakhir dari bagian ini, yang juga bab terakhir buku ini, menampilkan empat buah tabel statistik yang diperlukan dalam pengendalian proses kompleks.

BAB 15

INTISARI

1. Dalam Sorotan

Sorotan (*highlights*) merepresentasikan intisari atau saripati isi buku. Sorotan ini disajikan sesuai dengan format standar jurnal internasional yang terpandang. Ia terdiri atas 5 butir atau kurang dan setiap butir terdiri atas 85 karakter atau kurang termasuk spasi.

Berikut ini sorotan tentang isi buku:

- Proses apapun apalagi proses sosial bersifat kompleks dengan banyak CTQ terlibat
- Pengontrolan MPT/MPV yang ketat menjamin proses kompleks yang berkualitas tinggi
- Diperkenalkan tiga diagram kontrol baru sebagai komplemen diagram yang sudah ada
- Diperkenalkan juga teknik mengontrol proses kompleks dalam bidang sains sosial
- MS Excel digunakan agar teknik-teknik yang memang rumit menjadi mudah diterapkan

2. Ringkasan

Buku ini unik. Keunikannya terletak pada dua hal utama. *Pertama*, buku ini telah memungkinkan MVSPC digunakan pada 4 (empat) skenario sampling. Padahal, selama ini MVSPC hanya digunakan untuk 2 (dua) skenario sampling. *Kedua*, dua skenario sampling yang baru yang diperkenalkan dalam buku ini telah memungkinkan MVSPC dapat berperan dalam mengontrol kualitas proses kompleks bidang sains sosial.

Di samping keunikan tersebut, buku ini dilengkapi pula dengan fasilitas yang memungkinkan pembaca menikmati petualangan intelektual di medan yang tampak rumit dan jelimet. Kerumitan medan tersebut diatasi dengan menggunakan teknik-teknik yang juga rumit tapi tidak ruwet. Semua teknik yang rumit dan jelimet itu dapat dengan mudah dioperasionalkan dengan menggunakan MS Excel. Kemudian, untuk menghibur para pembaca dalam petualangan intelektual ini, ditampilkan panorama 41 buah contoh dari berbagai profesi lengkap dengan 33 gambar, 75 tabel data, dan 4 tabel statistik.

Buku ini diharapkan menjadi buku manual pegangan para profesional bidang Q-STEM (*Quality Science, Quality Technology, Quality Engineering, dan Quality Management*). Di samping itu, dapat dipastikan buku ini akan menjadi buku rujukan dan sumber informasi terkini bagi Dosen, Mahasiswa, Peneliti, dan mereka yang haus akan pemenuhan hasrat intelektual dalam memberikan kontribusi kepada kehidupan yang lebih baik.

BAB 16

KUMPULAN DATA

Tabel 16.1. Data skor nilai matapelajaran BI, Eng dan Mat dari 20 Kelas untuk Tahap I

Kelas No. 1							
No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	5,20	5,50	4,10	20	6,33	6,15	4,24
2	6,20	5,30	4,75	21	4,32	5,35	4,12
3	5,43	5,50	4,95	22	6,53	6,12	5,35
4	5,25	5,75	5,25	23	6,66	7,12	6,33
5	6,25	7,15	5,85	24	6,54	6,23	5,45
6	4,85	5,35	4,55	25	5,24	5,85	5,45
7	6,67	6,55	5,25	26	7,23	7,25	6,57
8	7,33	7,25	6,55	27	6,43	6,47	6,25
9	4,45	5,00	4,25	28	5,75	6,21	5,85
10	7,25	6,95	6,33	29	6,33	6,00	5,23
11	6,35	6,45	6,25	30	6,75	6,75	5,23
12	5,55	6,25	5,33	31	7,23	6,57	5,25
13	6,75	5,25	5,95	32	5,75	6,33	5,25
14	5,43	6,15	5,90	33	7,23	7,15	6,24
15	6,33	6,00	5,96	34	6,42	5,35	4,56
16	6,25	6,33	5,25	35	6,48	6,25	5,85
17	4,50	5,25	4,25	36	7,15	6,98	6,49
18	6,45	6,25	5,75	37	6,32	6,15	6,23
19	7,25	6,53	5,45				

Kelas No. 2

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	5,47	6,15	5,43	22	6,79	6,74	6,12
2	7,21	7,25	7,13	23	6,85	7,14	6,50
3	8,32	7,24	7,15	24	7,24	7,13	6,54
4	6,42	6,21	5,34	25	6,97	6,54	6,12
5	5,67	6,24	4,57	26	6,35	6,23	6,12
6	6,87	6,25	6,12	27	5,67	6,13	5,12
7	5,75	6,24	5,61	28	6,89	6,35	6,12
8	7,15	7,35	6,50	29	7,35	6,65	7,25
9	5,47	6,12	5,12	30	5,75	6,23	5,95
10	6,12	5,31	4,79	31	6,35	6,23	6,12
11	7,23	6,45	6,21	32	7,35	7,15	6,23
12	5,98	5,66	5,00	33	5,43	6,13	5,55
13	7,25	6,95	6,12	34	6,35	6,24	5,69
14	5,78	6,32	5,24	35	8,12	7,54	7,25
15	6,77	6,21	5,42	36	6,78	6,24	6,16
16	7,75	6,32	5,97	37	4,35	5,12	4,23
17	5,75	5,75	6,21	38	6,75	6,34	5,69
18	6,70	6,43	5,75	39	7,13	6,90	6,32
19	6,49	6,00	5,35	40	6,34	6,71	6,31
20	6,78	6,33	5,65	41	6,55	5,69	5,35
21	7,12	7,45	7,25				

Kelas No. 3

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	7,35	6,12	5,37	23	6,57	5,34	6,55
2	6,89	6,45	6,55	24	7,34	6,41	5,88
3	6,43	7,11	6,41	25	5,67	6,12	4,55
4	5,65	6,23	5,35	26	6,35	6,12	6,21
5	6,89	7,21	6,25	27	6,98	5,45	5,15
6	7,35	7,00	6,98	28	6,87	6,15	5,45
7	5,45	5,23	5,65	29	6,71	5,97	5,75
8	6,12	6,35	5,68	30	7,12	6,95	6,98
9	5,25	6,13	5,95	31	6,95	6,74	6,13
10	6,37	5,99	6,32	32	7,25	7,00	6,72
11	5,44	5,78	6,00	33	6,78	6,21	5,47
12	6,35	7,12	5,46	34	6,89	7,12	5,79
13	7,25	7,00	6,98	35	5,76	7,32	6,72
14	6,35	6,71	5,45	36	6,33	5,87	6,23
15	7,35	5,35	6,50	37	6,79	5,50	5,89
16	6,71	5,99	5,12	38	5,35	6,00	6,21
17	5,35	5,12	5,32	39	6,87	6,25	5,89
18	6,43	6,13	5,87	40	7,12	7,35	6,55
19	5,65	5,65	6,14	41	6,45	6,73	6,32
20	6,46	6,23	6,11	42	6,99	7,24	6,79
21	5,89	6,12	5,45	43	5,65	6,00	5,43
22	8,01	7,23	7,25				

Kelas No. 4

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,35	6,12	5,96	21	7,35	6,24	6,14
2	6,79	6,35	6,00	22	6,32	6,34	5,00
3	7,35	7,14	6,95	23	6,45	7,12	6,85
4	4,18	5,23	4,56	24	7,25	7,00	6,95
5	6,78	6,25	6,15	25	6,34	5,75	6,00
6	6,45	6,96	5,63	26	5,76	6,11	5,34
7	7,25	6,78	5,45	27	7,43	6,89	6,22
8	6,78	6,93	6,25	28	6,43	5,93	5,33
9	7,21	6,95	6,95	29	6,88	5,31	5,69
10	6,35	6,46	6,21	30	7,12	6,45	6,28
11	5,32	5,47	5,59	31	5,69	5,66	5,00
12	6,98	6,47	6,21	32	6,79	6,23	6,33
13	7,45	6,89	6,35	33	6,66	5,79	5,11
14	5,45	6,11	5,43	34	6,35	5,45	4,55
15	6,12	5,35	5,34	35	7,23	6,31	5,61
16	5,45	6,44	5,42	36	6,53	6,44	6,21
17	6,89	5,93	6,11	37	6,87	6,66	5,34
18	5,43	5,67	5,22	38	5,21	7,02	6,22
19	6,89	6,52	5,11	39	5,34	5,33	6,76
20	6,89	6,76	6,22				

Kelas No. 5

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	7,55	6,23	7,11	21	7,21	6,45	7,02
2	6,54	7,02	6,21	22	5,35	5,11	4,57
3	5,75	6,12	6,23	23	7,31	6,23	6,33
4	6,78	5,34	5,22	24	6,35	5,55	4,56
5	5,66	6,01	6,35	25	4,35	5,64	5,45
6	7,55	6,12	6,89	26	6,46	6,23	6,12
7	6,57	6,34	4,45	27	5,67	6,32	4,58
8	5,45	6,00	6,21	28	6,45	5,35	4,56
9	6,78	7,35	5,35	29	4,56	5,45	4,34
10	7,23	7,35	6,93	30	7,56	6,34	5,98
11	4,56	5,55	4,23	31	6,21	5,45	5,55
12	6,89	7,45	6,57	32	4,57	6,45	4,11
13	7,34	6,23	5,89	33	6,35	6,23	5,96
14	4,55	6,45	5,25	34	6,34	5,45	5,98
15	6,45	6,55	5,02	35	7,45	6,99	6,15
16	5,00	6,45	5,45	36	6,01	5,95	6,36
17	7,56	7,11	6,95	37	7,54	6,96	6,02
18	5,66	5,12	6,02	38	5,45	5,12	3,45
19	5,45	5,95	6,23	39	8,01	7,23	7,59
20	6,75	5,68	5,22	40	5,55	6,73	4,12

Kelas No. 6

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,45	6,22	4,23	21	6,95	6,77	6,43
2	6,34	5,12	4,75	22	6,78	6,45	6,22
3	7,23	6,38	5,55	23	7,12	5,36	6,31
4	6,75	6,12	5,98	24	6,89	5,34	5,45
5	6,33	6,67	5,89	25	7,12	5,46	6,11
6	5,25	5,67	5,89	26	6,34	5,67	5,24
7	5,95	6,21	5,43	27	5,23	6,57	6,21
8	6,75	6,00	5,76	28	6,45	6,11	5,21
9	6,99	5,00	6,14	29	7,31	5,24	6,00
10	7,23	6,55	6,41	30	5,67	6,35	6,15
11	6,32	5,98	4,56	31	5,35	5,12	4,55
12	4,76	5,00	4,23	32	7,12	5,65	6,13
13	6,46	6,23	5,12	33	5,45	6,35	6,00
14	6,23	5,12	5,03	34	6,34	4,57	4,25
15	6,78	6,34	5,65	35	5,89	6,31	5,14
16	6,34	5,65	4,75	36	7,02	6,47	6,32
17	7,32	6,98	6,35	37	6,45	5,09	4,57
18	4,56	5,35	4,24	38	5,09	6,23	6,21
19	6,57	6,66	5,78	39	5,45	6,27	5,35
20	7,21	6,46	5,45	40	7,12	6,57	6,43

Kelas No. 7

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,54	6,34	5,12	23	6,54	6,79	6,21
2	6,87	6,35	5,68	24	6,35	5,44	4,67
3	5,34	6,21	4,25	25	5,57	6,75	6,00
4	6,34	5,38	5,31	26	7,30	5,55	6,35
5	6,89	6,32	6,00	27	6,47	5,76	5,11
6	5,46	6,34	5,55	28	6,54	6,79	6,21
7	6,54	4,58	6,13	29	7,80	6,77	5,41
8	5,67	6,34	4,75	30	6,55	6,32	5,42
9	6,89	5,23	4,44	31	5,25	6,01	5,55
10	7,34	5,69	6,00	32	6,47	6,01	6,12
11	6,77	5,32	4,69	33	7,24	6,59	6,03
12	4,21	5,25	4,11	34	6,44	6,25	6,12
13	6,79	7,23	4,68	35	7,33	6,74	6,52
14	4,58	6,21	5,23	36	5,15	5,25	5,08
15	7,34	5,69	5,35	37	6,59	6,25	6,73
16	5,35	5,21	4,13	38	7,45	7,14	7,05
17	8,21	6,88	7,12	39	6,41	6,48	6,22
18	7,45	7,89	7,00	40	5,47	5,01	6,32
19	6,70	7,21	6,45	41	6,35	6,11	5,89
20	5,46	6,45	6,00	42	6,31	6,89	5,78
21	7,34	6,72	5,38	43	6,35	6,66	5,75
22	6,35	5,67	5,34				

Kelas No. 8

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	4.55	5.21	5.47	21	6.66	6.42	6.11
2	6.75	6.32	5.35	22	6.01	5.97	5.35
3	7.02	6.95	6.04	23	7.43	6.90	7.04
4	6.41	5.99	4.57	24	6.48	6.01	5.55
5	7.34	6.49	5.47	25	6.95	6.21	5.92
6	6.35	6.55	6.01	26	5.75	6.00	5.92
7	6.89	7.01	6.05	27	6.66	6.12	5.98
8	5.23	6.11	5.42	28	4.57	5.00	4.72
9	6.45	6.45	6.03	29	7.34	6.76	5.32
10	6.71	5.95	5.48	30	6.97	6.25	5.65
11	6.25	6.33	6.01	31	6.59	6.33	7.42
12	6.55	5.93	5.12	32	6.32	6.45	6.00
13	6.66	7.02	6.54	33	7.43	5.89	6.43
14	7.58	6.75	6.53	34	6.80	6.01	5.67
15	8.01	7.65	7.04	35	8.35	7.76	8.21
16	6.78	6.92	5.13	36	7.03	7.45	7.11
17	6.35	5.96	4.56	37	5.47	6.02	5.23
18	6.75	6.81	6.32	38	6.32	6.02	6.01
19	5.47	5.01	4.92	39	5.47	6.03	4.56
20	6.58	6.42	5.67	40	6.79	6.23	5.65

Kelas No. 9

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,22	6,03	5,48	22	5,43	6,01	5,55
2	6,47	6,75	6,00	23	6,04	6,78	6,83
3	7,35	7,01	6,55	24	6,57	6,31	6,02
4	6,25	5,90	5,42	25	7,03	6,98	6,65
5	6,56	5,95	4,58	26	6,45	6,36	6,01
6	6,94	7,02	6,04	27	7,03	6,65	6,05
7	4,36	5,54	4,37	28	6,98	6,75	6,01
8	7,21	6,83	5,39	29	7,09	6,98	7,42
9	6,95	6,21	5,95	30	6,99	7,01	6,97
10	7,03	7,58	6,95	31	5,35	5,89	6,55
11	6,85	6,35	6,04	32	6,35	6,11	5,45
12	7,04	6,94	6,02	33	7,21	6,55	5,75
13	6,85	6,43	5,97	34	6,55	6,75	6,43
14	6,54	6,32	6,94	35	6,93	5,99	6,01
15	6,01	5,86	5,39	36	6,00	6,45	7,22
16	5,45	6,07	5,43	37	7,32	7,21	8,27
17	6,78	6,43	5,43	38	6,23	5,00	4,75
18	7,03	7,56	6,95	39	7,21	4,23	6,34
19	6,59	6,45	6,21	40	5,95	6,21	4,54
20	7,05	7,42	6,75	41	6,89	4,56	5,45
21	6,89	6,56	6,08	42	7,34	6,87	6,45

Kelas No. 10

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,78	6,34	6,00	21	5,47	5,35	5,55
2	4,79	6,12	5,34	22	6,57	7,34	7,03
3	5,55	5,34	4,23	23	4,95	5,35	6,04
4	7,56	7,00	6,89	24	6,12	5,86	6,04
5	6,78	5,55	6,98	25	5,45	5,55	5,34
6	6,55	6,89	4,67	26	6,78	5,46	5,15
7	6,34	5,64	5,33	27	6,66	5,94	4,25
8	5,45	5,55	5,79	28	7,35	6,99	6,15
9	7,01	6,49	5,67	29	6,66	6,78	7,01
10	5,45	6,12	5,45	30	5,12	4,67	5,34
11	6,79	7,34	7,02	31	4,56	5,55	4,02
12	5,68	4,67	5,73	32	5,34	6,12	4,59
13	6,34	5,65	5,23	33	5,46	6,98	5,12
14	5,45	6,34	5,12	34	6,83	5,68	6,21
15	6,54	4,57	4,23	35	6,45	6,99	6,02
16	5,45	6,32	5,09	36	7,31	6,59	6,00
17	6,57	4,56	4,44	37	7,38	8,01	7,20
18	5,45	4,35	4,21	38	5,38	6,46	7,01
19	4,57	6,32	5,47	39	8,38	7,00	6,95
20	6,47	5,46	6,25	40	6,48	7,31	7,05

Kelas No. 11

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,25	6,76	5,59	21	7,13	6,96	6,03
2	6,35	6,21	5,35	22	6,89	6,55	4,57
3	7,34	6,98	5,45	23	7,03	6,99	6,05
4	6,47	6,21	5,42	24	6,45	6,44	5,82
5	6,55	6,01	5,35	25	5,31	6,01	5,24
6	6,55	6,01	5,35	26	6,31	6,95	5,38
7	6,54	5,95	5,23	27	6,56	5,95	5,21
8	5,35	5,12	4,31	28	7,31	6,87	6,08
9	6,45	6,23	5,24	29	6,66	5,45	6,32
10	6,35	6,21	5,32	30	5,78	5,32	4,67
11	6,79	6,21	4,21	31	6,57	4,58	5,79
12	7,23	6,95	7,03	32	7,32	6,44	6,04
13	6,35	6,22	4,58	33	5,33	6,34	6,67
14	6,55	6,14	5,25	34	6,57	6,42	5,69
15	7,45	7,23	7,04	35	6,45	4,97	5,63
16	5,47	6,23	5,34	36	7,21	6,48	6,31
17	6,98	5,78	4,69	37	6,31	5,88	5,23
18	6,44	5,88	5,21	38	5,32	5,85	4,21
19	5,48	6,02	5,31	39	5,47	5,75	4,35
20	6,79	6,34	5,32				

Kelas No. 12

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,79	6,33	5,41	22	6,75	6,03	4,72
2	6,43	5,83	4,21	23	6,22	4,76	4,32
3	6,66	4,85	5,18	24	6,77	5,38	4,98
4	7,54	6,56	4,22	25	6,98	7,05	5,35
5	6,58	6,33	4,21	26	7,03	7,53	7,03
6	6,79	5,31	4,32	27	6,77	6,12	4,58
7	5,35	5,11	4,23	28	5,74	5,23	4,97
8	6,15	6,68	5,32	29	6,77	5,38	4,98
9	7,34	6,45	6,34	30	5,98	6,23	4,79
10	6,35	5,22	4,12	31	6,75	6,76	6,73
11	6,98	6,34	5,31	32	7,46	6,49	6,32
12	5,44	6,03	4,21	33	6,66	5,97	5,32
13	5,23	4,56	4,12	34	6,25	6,17	5,89
14	6,25	6,06	4,15	35	6,89	5,84	5,55
15	5,34	5,11	4,21	36	7,18	6,57	6,26
16	6,45	6,58	6,01	37	6,83	5,27	4,69
17	5,32	5,55	6,21	38	6,44	5,23	4,39
18	6,45	6,21	4,22	39	5,65	6,02	4,38
19	7,21	6,59	5,35	40	6,79	6,25	5,12
20	6,97	5,75	4,73	41	4,65	5,21	3,65
21	6,13	5,32	4,07	42	6,36	6,42	5,47

Kelas No. 13

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,79	6,32	4,65	20	7,34	5,38	5,56
2	5,34	6,04	5,21	21	4,35	5,55	3,67
3	6,38	6,05	5,43	22	5,64	5,28	4,71
4	8,41	7,89	7,43	23	7,45	6,85	6,27
5	7,56	7,33	6,96	24	6,45	6,33	5,28
6	6,66	5,48	5,32	25	6,33	5,89	4,21
7	6,79	6,32	4,69	26	5,62	5,76	4,89
8	6,89	5,55	4,79	27	6,75	6,19	4,21
9	5,89	6,00	4,79	28	6,88	5,62	5,64
10	6,89	6,38	5,35	29	5,65	5,00	4,23
11	6,32	5,55	4,79	30	6,18	5,35	4,37
12	5,34	6,05	4,22	31	8,43	8,56	7,10
13	6,54	5,36	5,29	32	7,35	6,66	7,12
14	6,85	6,25	4,62	33	6,35	6,02	5,66
15	5,34	5,09	5,23	34	6,29	5,31	4,56
16	5,48	6,01	5,34	35	5,75	6,34	5,26
17	6,93	6,15	5,25	36	6,66	6,35	4,64
18	5,69	5,31	4,58	37	5,38	4,75	5,61
19	6,98	6,79	6,05				

Kelas No. 14

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,11	6,75	6,32	22	5,67	4,85	4,59
2	6,89	7,21	6,32	23	8,14	6,35	7,31
3	6,32	5,68	4,21	24	6,89	6,57	5,12
4	5,83	6,45	5,44	25	5,45	6,31	4,58
5	6,89	6,43	5,69	26	6,75	6,46	4,57
6	7,35	6,45	6,32	27	4,52	6,79	5,41
7	6,98	6,00	5,22	28	6,44	6,92	5,35
8	5,75	6,35	5,32	29	6,98	5,40	4,52
9	6,49	6,46	5,22	30	6,23	5,98	4,62
10	7,32	6,69	5,98	31	7,35	6,36	4,32
11	6,55	5,76	4,57	32	6,67	6,24	5,16
12	6,00	7,43	5,42	33	6,11	6,85	4,69
13	5,44	6,38	5,27	34	6,35	6,79	5,33
14	6,35	5,84	4,57	35	5,75	6,33	4,21
15	5,55	6,01	4,23	36	4,12	5,75	3,75
16	6,78	6,95	5,35	37	6,98	6,35	5,44
17	6,79	6,55	5,42	38	6,85	6,33	4,51
18	5,41	4,58	4,33	39	5,45	5,12	3,57
19	6,56	6,96	5,21	40	6,46	6,87	5,78
20	4,67	6,23	5,24	41	7,44	5,21	6,45
21	6,79	5,88	5,12				

Kelas No. 15

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,35	5,35	7,12	22	7,02	7,11	6,56
2	5,34	6,09	5,32	23	6,93	5,48	6,11
3	6,34	5,67	5,28	24	5,68	6,34	6,57
4	5,43	4,35	6,89	25	6,35	5,67	6,21
5	6,00	7,34	6,54	26	7,53	6,75	6,35
6	7,34	5,67	5,21	27	6,57	6,34	5,67
7	7,56	4,68	6,45	28	6,55	6,34	5,47
8	6,89	5,67	6,23	29	7,09	6,35	5,89
9	7,56	6,93	6,35	30	6,75	6,35	4,35
10	6,12	5,67	6,93	31	7,45	6,92	4,56
11	5,67	7,45	5,67	32	6,57	6,34	6,08
12	6,34	7,34	4,67	33	7,49	6,94	6,35
13	5,55	4,67	5,01	34	6,66	5,98	6,75
14	6,25	6,79	5,93	35	6,01	5,26	5,42
15	7,23	6,12	5,89	36	6,66	5,95	4,38
16	6,35	5,34	5,26	37	5,56	6,23	6,23
17	6,78	6,34	5,97	38	6,94	4,75	5,33
18	7,56	7,01	7,35	39	5,45	6,34	5,46
19	5,35	6,45	5,55	40	6,89	6,23	5,99
20	6,86	5,45	5,98	41	7,79	8,34	7,94
21	6,66	4,89	5,95				

Kelas No. 16

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,00	5,21	6,02	22	6,39	6,75	6,00
2	6,45	6,31	5,49	23	6,66	6,98	7,01
3	6,66	5,98	6,66	24	6,41	5,00	6,30
4	7,21	5,39	6,21	25	6,99	6,59	6,31
5	6,35	6,94	6,01	26	5,12	6,00	6,24
6	6,35	6,94	5,95	27	6,83	6,04	5,31
7	7,29	6,99	6,52	28	8,01	7,45	7,93
8	6,55	6,21	5,76	29	6,25	6,32	6,50
9	6,00	6,33	5,75	30	6,87	6,00	5,39
10	6,00	6,36	5,60	31	6,89	7,31	6,46
11	5,94	5,66	6,03	32	6,00	5,57	6,10
12	7,59	7,23	6,94	33	6,67	6,98	5,44
13	6,83	6,21	5,39	34	5,07	6,23	6,00
14	5,19	5,99	6,15	35	6,97	6,31	6,00
15	6,93	6,45	5,25	36	7,22	6,34	6,20
16	6,33	5,88	6,11	37	6,99	6,45	6,70
17	6,50	6,00	5,72	38	6,22	6,00	5,62
18	7,02	7,43	6,20	39	6,45	6,88	5,38
19	7,31	6,43	5,32	40	7,32	5,76	6,34
20	6,44	6,00	5,93	41	6,45	6,03	6,39
21	6,59	6,43	5,01	42	6,35	6,88	6,00

Kelas No. 17

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6.55	5.27	6.30	22	6.66	5.79	6.00
2	6.66	6.53	6.85	23	5.58	6.69	6.02
3	7.47	7.42	6.99	24	6.87	6.31	5.68
4	6.23	6.09	5.34	25	7.01	5.46	6.50
5	6.06	6.31	5.47	26	6.99	6.46	6.07
6	6.35	5.38	6.50	27	7.77	5.84	6.10
7	5.97	6.21	6.00	28	6.98	6.46	6.55
8	6.57	6.98	6.00	29	7.40	6.57	5.63
9	6.78	7.02	6.90	30	8.01	6.98	7.33
10	8.04	7.76	7.04	31	7.43	6.98	7.02
11	6.58	6.35	5.46	32	6.54	5.68	6.66
12	5.68	6.03	6.02	33	6.00	6.12	6.39
13	6.29	5.96	6.00	34	6.57	6.35	5.57
14	6.45	6.55	5.21	35	6.55	6.79	6.30
15	7.04	6.79	6.85	36	6.85	7.54	6.95
16	6.46	6.94	5.47	37	5.45	6.54	6.80
17	7.45	7.44	6.97	38	7.33	6.31	5.57
18	6.57	6.86	6.70	39	6.45	5.48	6.00
19	6.73	5.55	6.14	40	6.02	5.45	5.76
20	6.89	6.35	5.46	41	6.03	5.08	6.11
21	6.99	6.46	7.01				

Kelas No. 18

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,66	6,00	5,70	23	8,57	7,31	7,40
2	7,41	6,69	6,34	24	6,12	6,57	5,75
3	6,98	6,21	6,40	25	6,78	6,34	6,00
4	6,32	6,48	5,68	26	6,35	6,20	5,25
5	7,77	7,67	7,00	27	6,03	6,03	6,50
6	6,56	6,00	5,23	28	6,05	6,47	5,38
7	7,77	6,30	5,75	29	6,78	6,32	6,00
8	6,21	5,67	6,24	30	5,55	6,37	6,00
9	6,66	6,79	6,80	31	6,25	6,44	6,50
10	6,32	6,47	5,90	32	5,47	6,00	6,35
11	6,00	5,63	6,04	33	6,21	6,00	5,41
12	6,48	6,75	7,11	34	6,76	6,55	5,21
13	6,94	5,99	6,21	35	6,45	5,96	6,00
14	8,03	7,79	7,14	36	6,00	6,10	5,25
15	7,43	7,78	6,75	37	6,31	6,00	5,95
16	6,45	6,87	6,88	38	6,57	6,23	6,70
17	7,21	7,26	7,05	39	6,66	6,03	5,90
18	6,98	6,79	6,00	40	6,98	5,35	6,31
19	6,25	6,00	6,01	41	6,00	5,99	6,20
20	6,00	6,20	5,31	42	6,79	6,02	5,57
21	6,59	6,00	6,83	43	6,13	6,93	5,12
22	6,89	6,78	5,31				

Kelas No. 19

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	7,05	7,34	7,24	22	6,88	6,29	6,00
2	6,87	5,99	6,63	23	7,03	6,95	5,50
3	6,36	5,21	6,00	24	6,54	6,03	6,20
4	6,08	6,34	5,55	25	6,78	6,04	6,10
5	6,31	6,00	5,85	26	6,51	6,00	6,24
6	6,48	6,03	6,79	27	6,09	6,43	5,53
7	6,98	6,42	6,10	28	6,83	6,99	6,97
8	7,31	6,69	6,75	29	7,34	7,21	6,95
9	6,43	6,00	5,37	30	6,83	6,39	6,70
10	5,75	6,53	6,01	31	7,01	6,95	6,41
11	6,66	7,02	6,54	32	5,84	6,36	6,80
12	5,53	6,38	5,07	33	6,23	7,21	6,94
13	6,56	7,01	7,00	34	5,65	6,32	6,11
14	6,00	6,30	5,42	35	6,98	6,05	5,98
15	6,00	6,28	6,00	36	6,04	6,23	5,57
16	6,92	6,91	7,01	37	6,58	6,31	7,21
17	6,15	6,15	6,80	38	6,45	5,32	6,00
18	5,99	6,02	6,00	39	6,00	6,66	5,70
19	5,31	6,91	6,11	40	6,00	7,45	6,98
20	6,59	6,12	5,58	41	5,78	6,22	6,00
21	6,21	6,00	5,75				

Kelas No. 20

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,78	5,85	6,32	23	6,93	6,24	7,01
2	7,00	6,93	6,13	24	7,35	7,12	6,94
3	6,77	6,98	7,12	25	8,95	7,11	7,75
4	6,02	5,12	6,03	26	6,89	7,35	7,03
5	6,34	5,65	6,10	27	6,01	6,12	5,53
6	6,56	6,54	6,50	28	6,89	7,02	6,95
7	5,78	6,23	6,00	29	7,03	6,99	7,01
8	8,34	7,56	7,35	30	6,04	6,56	6,21
9	6,78	5,95	6,35	31	7,09	6,35	7,03
10	5,55	6,35	6,93	32	6,66	5,86	6,04
11	6,79	4,57	6,17	33	8,04	7,26	8,05
12	7,01	6,23	6,95	34	6,25	5,37	6,00
13	6,75	6,12	5,98	35	6,60	7,11	5,39
14	5,35	6,45	6,00	36	7,37	6,41	6,04
15	6,12	5,38	6,31	37	5,48	6,32	6,85
16	6,45	6,00	6,35	38	6,48	6,40	6,00
17	7,56	5,56	6,00	39	7,36	6,50	7,00
18	6,56	6,21	6,55	40	6,84	6,00	5,95
19	7,77	6,95	7,05	41	7,15	7,03	6,48
20	6,00	6,05	6,34	42	6,48	6,00	7,31
21	6,75	6,02	7,12	43	7,49	8,01	7,25
22	6,65	5,12	6,41				

Tabel 16.2. Data kualitas tablet Paracetamol untuk Tahap I

No.	X	Y	No.	X	Y
1	4,267	7,740	22	4,100	7,837
2	4,260	7,745	23	4,680	7,458
3	4,318	7,560	24	4,400	7,745
4	4,287	7,840	25	4,438	7,741
5	4,314	7,752	26	3,500	7,950
6	4,282	7,750	27	4,405	7,440
7	4,298	7,850	28	4,430	7,540
8	4,321	7,740	29	4,035	7,841
9	4,298	7,746	30	4,050	7,941
10	4,330	7,950	31	4,340	7,943
11	4,562	7,640	32	4,412	7,850
12	4,074	7,960	33	4,637	7,743
13	3,525	8,505	34	4,030	7,840
14	4,358	7,620	35	4,023	7,950
15	4,358	7,834	36	4,400	7,840
16	4,490	7,540	37	4,605	7,740
17	4,319	7,530	38	4,005	7,960
18	4,285	7,734	39	4,012	7,930
19	4,450	7,445	40	4,022	7,921
20	4,029	7,925	41	4,400	7,435
21	4,715	7,640	42	4,361	7,804

Catatan:

X: Ketebalan Tablet (dalam mm)

Y: Kekerasan Tablet (dalam kg/cm²)

Tabel 16.3. Data hasil observasi tablet Paracetamol saat pengontrolan di Tahap II

No.	X	Y	No.	X	Y
1	4,305	8,150	11	4,270	7,740
2	4,320	7,640	12	4,274	7,640
3	4,330	7,750	13	4,380	7,440
4	4,310	7,130	14	4,278	8,150
5	3,890	8,310	15	4,258	8,050
6	4,300	8,130	16	4,312	7,640
7	4,370	8,030	17	4,328	8,150
8	4,360	7,540	18	4,300	7,740
9	4,130	7,865	19	4,320	7,540
10	4,310	7,440	20	4,342	7,876

Tabel 16.4. Data skor nilai matapelajaran BI, Eng dan Mat dari
10 Kelas untuk Tahap II

Kelas No. 1

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,85	5,89	6,00	21	6,93	6,31	5,36
2	6,01	6,00	5,35	22	6,33	5,95	5,02
3	6,89	6,72	5,90	23	6,00	6,35	5,69
4	5,45	6,04	6,01	24	7,39	6,12	5,93
5	6,35	6,99	5,36	25	6,66	6,83	5,11
6	6,23	6,45	5,21	26	6,10	6,00	5,35
7	6,55	5,35	6,10	27	6,84	6,39	6,01
8	7,54	6,58	5,01	28	6,00	6,03	5,59
9	6,66	6,34	5,21	29	5,99	6,35	6,00
10	6,87	6,21	4,75	30	6,56	6,21	5,31
11	7,89	6,99	6,45	31	6,55	6,00	5,60
12	6,56	6,43	4,57	32	7,45	7,47	6,98
13	7,22	6,35	6,54	33	6,66	6,21	5,43
14	6,35	6,12	6,09	34	7,04	6,94	6,03
15	6,11	6,35	5,45	35	6,00	6,41	5,00
16	6,45	6,96	5,23	36	6,09	6,42	5,37
17	6,00	6,00	4,90	37	6,44	6,97	6,03
18	6,84	6,02	5,32	38	7,32	6,43	5,98
19	6,00	5,35	6,20	39	5,55	6,12	6,04
20	6,21	5,95	6,00	40	6,43	6,75	6,03

Kelas No. 2

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,00	6,10	5,18	22	6,02	5,96	6,00
2	6,46	6,97	6,12	23	7,65	7,35	8,05
3	7,33	6,93	6,04	24	6,37	6,00	5,50
4	6,40	6,03	5,75	25	6,94	6,02	6,36
5	6,27	6,29	5,74	26	6,49	6,00	5,95
6	6,66	5,97	6,48	27	7,43	6,46	5,55
7	7,45	6,95	5,03	28	7,65	7,35	8,05
8	6,57	6,95	6,99	29	7,34	7,56	6,98
9	7,34	6,98	6,05	30	6,66	6,57	5,47
10	6,50	6,45	6,00	31	6,35	6,02	5,65
11	7,56	7,83	8,23	32	6,77	5,45	6,00
12	6,94	7,03	6,54	33	6,76	5,55	6,01
13	6,31	6,35	6,07	34	6,58	6,23	5,96
14	6,69	7,01	6,07	35	7,34	7,58	6,98
15	7,45	7,04	6,95	36	7,43	6,99	6,05
16	6,40	6,42	5,75	37	6,94	6,21	5,00
17	6,56	6,38	5,41	38	6,23	5,98	5,01
18	7,10	6,40	6,00	39	6,40	5,21	5,00
19	6,58	6,15	5,63	40	5,78	6,23	6,00
20	7,95	7,42	6,99	41	6,00	6,25	5,40
21	6,47	6,00	5,90	42	6,04	6,55	6,01

Kelas No. 3

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,30	6,04	5,03	20	6,34	6,40	6,35
2	6,75	6,34	6,00	21	6,56	6,93	5,90
3	7,04	6,95	5,94	22	7,01	7,34	7,22
4	6,57	6,30	6,00	23	6,59	6,21	5,72
5	6,69	7,01	6,94	24	6,32	5,32	4,75
6	6,11	6,94	5,43	25	6,66	7,21	6,30
7	6,66	6,03	5,96	26	6,45	6,01	5,00
8	7,03	6,98	6,87	27	6,95	6,14	5,75
9	7,01	6,73	6,00	28	6,02	6,31	5,60
10	6,35	6,60	5,95	29	6,79	5,90	6,00
11	6,39	6,00	5,33	30	6,97	7,54	5,41
12	7,39	7,45	7,03	31	6,15	6,00	6,00
13	6,66	6,21	5,23	32	7,08	6,95	6,35
14	6,94	5,99	5,21	33	6,47	6,02	5,36
15	7,03	5,69	5,98	34	6,12	6,35	5,25
16	6,94	7,04	6,84	35	6,55	5,43	6,00
17	6,00	6,30	5,80	36	6,69	6,04	4,95
18	6,00	6,01	4,58	37	6,02	6,01	5,30
19	6,00	6,57	5,00				

Kelas No. 4

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,83	5,97	5,32	22	6,12	6,00	5,06
2	5,39	6,00	5,00	23	6,43	5,96	6,00
3	6,58	6,02	5,55	24	6,32	6,00	5,30
4	7,03	6,58	5,99	25	6,00	6,04	5,55
5	6,94	6,02	5,95	26	7,05	7,33	7,01
6	6,45	6,92	5,10	27	5,79	6,21	5,60
7	6,00	6,03	5,83	28	6,45	5,79	5,31
8	6,99	6,05	5,34	29	7,45	6,95	8,55
9	7,08	6,95	6,95	30	6,20	6,00	6,10
10	8,41	7,95	7,01	31	6,66	6,75	4,90
11	6,28	6,35	5,21	32	6,35	6,00	5,75
12	5,83	6,41	6,00	33	6,35	6,00	5,11
13	6,87	5,94	5,64	34	6,43	6,04	5,25
14	7,21	6,32	5,99	35	6,10	6,00	5,45
15	6,66	6,04	5,08	36	6,34	6,96	4,50
16	6,01	5,75	6,53	37	6,79	6,34	4,55
17	6,40	6,00	5,95	38	7,23	6,89	5,86
18	6,55	6,36	6,03	39	6,00	6,13	7,21
19	6,75	6,75	6,02	40	6,00	6,09	5,55
20	7,31	5,99	6,04	41	7,11	4,65	6,78
21	6,87	6,01	5,95	42	6,98	6,21	6,96

Kelas No. 5

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,01	6,71	5,60	21	5,44	6,23	6,12
2	6,34	6,23	6,55	22	6,12	6,00	5,00
3	6,30	6,54	5,92	23	6,56	5,45	6,85
4	6,00	5,23	6,89	24	7,54	6,23	7,35
5	6,45	6,45	7,00	25	6,45	6,67	6,01
6	6,77	6,00	5,75	26	6,66	6,00	5,25
7	5,67	6,66	6,32	27	5,44	6,43	6,78
8	6,56	6,89	7,21	28	6,66	7,12	5,95
9	5,66	7,45	6,57	29	6,00	6,31	5,93
10	7,34	6,78	7,01	30	6,66	5,12	6,11
11	6,66	6,00	5,93	31	7,35	6,59	7,01
12	7,00	6,95	6,75	32	6,87	6,12	5,98
13	6,95	5,45	6,75	33	5,49	6,03	6,02
14	7,45	5,65	6,95	34	6,86	7,12	6,05
15	6,79	6,45	5,36	35	6,00	6,04	5,55
16	5,55	6,01	6,00	36	5,55	6,01	5,23
17	6,45	5,75	6,09	37	6,09	5,45	6,00
18	6,00	5,35	5,95	38	7,45	6,95	6,85
19	6,75	5,76	6,03	39	6,66	5,67	6,56
20	6,35	6,20	5,00				

Kelas No. 6

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,45	5,23	6,35	21	7,12	6,35	6,85
2	7,03	6,66	6,23	22	6,30	6,00	5,37
3	6,54	6,12	5,39	23	6,66	6,35	5,11
4	6,20	6,00	6,05	24	8,24	6,79	7,11
5	6,34	5,55	6,12	25	5,67	6,23	5,90
6	7,03	6,99	7,35	26	6,21	5,11	6,00
7	6,45	6,66	5,34	27	6,34	6,00	5,64
8	5,55	6,35	6,02	28	7,11	5,79	6,21
9	8,31	7,35	7,45	29	8,01	6,95	7,35
10	5,80	6,01	5,97	30	6,36	6,00	6,40
11	7,12	5,46	7,04	31	6,66	6,11	5,47
12	6,78	7,11	5,56	32	8,12	6,97	7,98
13	5,67	6,34	6,55	33	6,00	5,50	6,94
14	6,54	5,96	6,34	34	6,66	6,56	6,99
15	5,55	6,23	6,10	35	7,11	6,25	6,10
16	7,23	7,11	6,95	36	6,00	5,00	6,01
17	6,35	5,25	6,05	37	7,23	6,69	5,55
18	6,11	6,00	6,00	38	6,95	7,01	6,95
19	6,20	6,00	5,25	39	5,96	6,47	6,20
20	6,35	6,21	6,98				

Kelas No. 7

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	7,22	6,48	6,05	22	7,77	5,76	6,89
2	6,11	5,95	6,24	23	5,67	6,23	6,78
3	7,21	5,47	6,35	24	7,45	6,34	6,45
4	6,45	6,57	5,93	25	5,55	6,45	6,96
5	7,45	6,66	5,09	26	6,35	5,89	6,47
6	5,45	6,67	6,23	27	6,23	5,90	6,03
7	6,35	6,45	5,21	28	6,70	5,65	5,75
8	7,56	7,77	5,46	29	6,33	6,75	6,29
9	6,00	6,29	5,68	30	7,34	6,89	6,91
10	7,56	7,34	7,00	31	7,44	6,95	5,76
11	8,45	6,78	7,45	32	5,37	6,11	6,94
12	6,45	6,00	5,64	33	6,11	5,75	6,10
13	6,05	5,48	6,11	34	6,31	5,95	6,00
14	6,79	6,23	6,00	35	8,12	7,34	7,25
15	5,35	6,14	6,00	36	6,35	5,75	6,00
16	6,45	6,44	5,89	37	7,45	6,97	6,39
17	7,45	6,59	6,45	38	5,90	6,53	5,97
18	5,68	6,32	6,25	39	6,32	6,95	5,75
19	6,35	6,57	6,72	40	6,46	5,95	6,48
20	8,67	7,23	6,72	41	7,33	6,51	6,78
21	6,78	7,99	7,02	42	6,45	7,44	6,38

Kelas No. 8

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	8,43	7,35	8,44	22	7,35	6,34	6,45
2	5,64	6,33	6,18	23	6,52	6,93	6,68
3	6,32	5,75	6,68	24	8,45	6,73	7,55
4	7,36	7,11	6,98	25	7,45	6,55	6,35
5	6,35	7,45	7,07	26	5,46	6,22	6,85
6	5,55	6,93	5,28	27	7,34	7,33	6,39
7	6,34	5,88	6,95	28	6,37	5,34	6,22
8	8,21	7,37	6,55	29	7,45	7,11	6,98
9	6,45	6,38	5,99	30	5,48	6,23	5,67
10	7,11	6,48	7,04	31	6,32	6,13	6,50
11	6,66	5,78	6,15	32	7,34	6,45	6,03
12	8,24	7,51	7,47	33	5,47	6,37	6,11
13	5,67	6,11	6,00	34	7,48	6,21	6,93
14	4,68	6,45	5,31	35	6,45	5,89	6,57
15	6,00	5,27	6,60	36	5,67	6,03	5,80
16	6,21	6,75	6,25	37	6,79	7,11	5,38
17	7,34	6,23	6,66	38	7,47	6,55	7,49
18	6,35	5,89	6,31	39	5,33	6,00	6,93
19	7,33	6,87	5,49	40	7,35	7,15	6,05
20	5,70	6,11	5,34	41	6,89	5,44	6,79
21	6,32	5,34	6,03				

Kelas No. 9

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	8,21	6,79	7,04	21	6,28	6,12	6,72
2	5,61	6,33	5,45	22	5,12	6,37	6,28
3	6,45	6,33	7,02	23	5,17	6,28	6,03
4	7,35	6,48	7,01	24	7,55	7,02	7,69
5	6,22	5,48	6,00	25	6,37	6,31	5,96
6	5,45	6,29	6,48	26	8,35	7,95	7,22
7	6,38	6,66	7,31	27	5,73	6,48	7,44
8	8,13	7,34	8,03	28	6,37	5,97	6,39
9	6,35	6,88	7,03	29	7,45	6,93	6,25
10	7,04	7,22	7,15	30	5,37	6,01	6,88
11	5,62	6,44	6,29	31	6,66	5,89	7,38
12	6,08	7,15	6,49	32	7,12	6,95	6,99
13	7,15	7,45	7,01	33	8,03	7,94	8,58
14	6,73	7,39	7,22	34	5,73	6,47	6,66
15	7,69	7,26	6,08	35	6,47	6,32	5,04
16	5,55	6,35	7,57	36	5,15	6,75	6,24
17	5,02	6,16	5,55	37	6,46	5,83	6,48
18	6,79	7,25	6,31	38	6,33	5,16	6,03
19	6,37	5,12	6,09	39	6,48	5,93	6,03
20	6,27	5,38	6,00	40	5,57	6,03	6,25

Kelas No. 10

No.	BI	Eng	Mat	No.	BI	Eng	Mat
1	6,45	6,38	5,93	22	7,35	6,33	6,93
2	7,55	6,94	6,48	23	6,48	6,41	5,39
3	7,42	6,94	5,84	24	7,37	6,39	7,47
4	5,95	6,58	6,93	25	4,88	6,37	6,48
5	6,35	5,46	7,32	26	6,48	6,18	6,39
6	8,47	7,76	7,83	27	5,68	6,35	5,18
7	7,35	6,47	7,02	28	7,48	5,38	6,44
8	6,45	6,03	5,95	29	6,45	7,33	6,75
9	5,47	6,00	6,04	30	5,38	5,62	6,39
10	6,58	6,33	7,02	31	6,48	6,21	4,51
11	7,22	6,79	7,01	32	7,77	6,37	4,89
12	6,48	6,55	6,79	33	8,36	7,21	7,02
13	7,33	5,47	6,03	34	7,48	5,28	6,49
14	6,69	6,03	6,45	35	6,49	5,38	6,44
15	5,67	7,46	6,03	36	5,37	4,28	5,92
16	6,49	6,44	5,93	37	6,37	5,27	7,58
17	7,35	6,95	6,66	38	6,47	7,35	5,93
18	6,21	5,69	6,46	39	8,10	7,95	8,04
19	5,31	6,75	6,02	40	7,21	7,00	6,93
20	6,32	5,98	5,31	41	7,50	7,62	6,59
21	5,44	6,93	6,04				

Tabel 16.5. Data matriks kovariansi kelompok SS dari 14 Kelas untuk Tahap I

No.	Matriks Kovariansi			No.	Matriks Kovariansi		
1	0,06132	0,02219	0,02991	8	0,07058	0,05481	0,01481
	0,02219	0,19182	0,00975		0,05481	0,27788	0,04389
	0,02991	0,00975	0,37627		0,01481	0,04389	0,20356
2	0,02802	0,00793	0,02491	9	0,08309	0,04185	0,01023
	0,00793	0,20741	0,02592		0,04185	0,15836	0,03368
	0,02491	0,02592	0,11546		0,01023	0,03368	0,24558
3	0,06237	0,01578	0,01431	10	0,02176	-0,00794	0,01022
	0,01578	0,20648	0,02108		-0,00794	0,26603	0,01224
	0,01431	0,02108	0,13681		0,01022	0,01224	0,22364
4	0,06015	-0,01679	0,01181	11	0,06476	-0,02324	0,00375
	-0,01679	0,14245	0,05040		-0,02324	0,13377	0,00211
	0,01181	0,05040	0,29169		0,00375	0,00211	0,05672
5	0,05144	0,03428	0,00570	12	0,05203	0,02119	-0,01558
	0,03428	0,24242	0,06075		0,02119	0,19888	-0,01113
	0,00570	0,06075	0,08461		-0,01558	-0,01113	0,13736
6	0,05283	-0,03145	-0,00147	13	0,05759	-0,00927	-0,00518
	-0,03145	0,15367	0,05420		-0,00927	0,21345	0,00321
	-0,00147	0,05420	0,18202		-0,00518	0,00321	0,27819
7	0,06985	0,01759	0,00326	14	0,05402	0,00616	0,00080
	0,01759	0,19061	-0,03247		0,00616	0,13280	0,02084
	0,00326	-0,03247	0,12229		0,00080	0,02084	0,22147

Tabel 16.6. Data matriks kovariansi kelompok SN dari 11 Kelas untuk Tahap I

No.	Matriks Kovariansi				
1	1,87842	0,63177	0,21683	0,84321	0,59072
	0,63177	0,84813	0,41729	0,51579	0,63887
	0,21683	0,41729	0,36738	0,30179	0,28375
	0,84321	0,51579	0,30179	0,71812	0,48999
	0,59072	0,63887	0,28375	0,48999	0,73581
2	0,70328	0,18094	0,09077	0,21714	0,19599
	0,18094	0,37828	0,18945	0,21062	0,32344
	0,09077	0,18945	0,27735	0,07970	0,25466
	0,21714	0,21062	0,07970	0,37978	0,12721
	0,19599	0,32344	0,25466	0,12721	0,63507
3	0,99880	0,56527	0,19828	0,52440	0,43875
	0,56527	0,86294	0,30887	0,35025	0,33770
	0,19828	0,30887	0,30379	0,19060	0,20771
	0,52440	0,35025	0,19060	0,49663	0,20851
	0,43875	0,33770	0,20771	0,20851	0,54082
4	1,04078	0,56622	0,36119	0,50714	0,65185
	0,56622	0,82095	0,45067	0,45976	0,55134
	0,36119	0,45067	0,53868	0,23602	0,45891
	0,50714	0,45976	0,23602	0,62796	0,41766
	0,65185	0,55134	0,45891	0,41766	0,71161
5	0,64881	0,31279	0,29752	0,12099	0,39812
	0,31279	0,65419	0,41339	0,18139	0,53125
	0,29752	0,41339	0,66185	0,02372	0,47098
	0,12099	0,18139	0,02372	0,43681	0,04609
	0,39812	0,53125	0,47098	0,04609	0,70332
6	1,06919	0,57659	0,22324	0,48180	0,45363
	0,57659	0,90285	0,34385	0,37207	0,44294
	0,22324	0,34385	0,34283	0,24659	0,25354
	0,48180	0,37207	0,24659	0,51310	0,21961
	0,45363	0,44294	0,25354	0,21961	0,52776

Tabel 16.6. (Sambungan)

No.	Matriks Kovariansi				
7	0,83741	0,37861	0,29379	0,23193	0,46853
	0,37861	0,51998	0,24076	0,10905	0,47169
	0,29379	0,24076	0,56528	0,00815	0,36501
	0,23193	0,10905	0,00815	0,41669	0,16806
	0,46853	0,47169	0,36501	0,16806	0,54615
8	1,11960	0,81235	0,46910	0,59680	0,69822
	0,81235	1,08406	0,59868	0,53116	0,85557
	0,46910	0,59868	0,65413	0,28238	0,51764
	0,59680	0,53116	0,28238	0,66886	0,42588
	0,69822	0,85557	0,51764	0,42588	1,00326
9	0,73866	0,57053	0,32203	0,24189	0,61127
	0,57053	1,02042	0,49462	0,37160	0,63834
	0,32203	0,49462	0,61852	0,13177	0,47080
	0,24189	0,37160	0,13177	0,59475	0,22888
	0,61127	0,63834	0,47080	0,22888	0,75092
10	0,71269	0,45272	0,38430	0,27213	0,61458
	0,45272	0,68469	0,47532	0,30933	0,52381
	0,38430	0,47532	0,45871	0,18353	0,45201
	0,27213	0,30933	0,18353	0,38641	0,20282
	0,61458	0,52381	0,45201	0,20282	0,74703
11	0,93479	0,17249	0,12117	0,05132	0,12523
	0,17249	0,56909	0,18484	0,13474	0,17633
	0,12117	0,18484	0,47895	-0,12043	0,23456
	0,05132	0,13474	-0,12043	0,39592	-0,07246
	0,12523	0,17633	0,23456	-0,07246	0,40999

Tabel 16.7. Data matriks kovariansi kelompok SS dari 1 Kelas untuk Tahap II

No.	Matriks Kovariansi		
1	0,06809	0,02365	0,03123
	0,02365	0,17583	0,08749
	0,03123	0,08749	0,26105

Tabel 16.8. Data matriks kovariansi kelompok SN dari 4 Kelas untuk Tahap II

No.	Matriks Kovariansi				
1	0,64327	0,27114	0,28991	0,04075	0,42361
	0,27114	0,39265	0,31128	0,23456	0,37006
	0,28991	0,31128	0,45167	0,03110	0,38870
	0,04075	0,23456	0,03110	0,52525	0,09494
	0,42361	0,37006	0,38870	0,09494	0,60929
2	0,80143	0,40619	0,27527	0,22740	0,41777
	0,40619	0,88111	0,36028	0,38955	0,42600
	0,27527	0,36028	0,55889	0,21314	0,42602
	0,22740	0,38955	0,21314	0,50147	0,24968
	0,41777	0,42600	0,42602	0,24968	0,64726
3	1,06237	0,33322	0,12659	0,44304	0,30912
	0,33322	0,89837	0,55012	0,32751	0,50740
	0,12659	0,55012	0,52386	0,29180	0,29093
	0,44304	0,32751	0,29180	0,48880	0,24849
	0,30912	0,50740	0,29093	0,24849	0,52876
4	0,93463	0,62834	0,40022	0,52827	0,50721
	0,62834	1,03335	0,53451	0,55977	0,55281
	0,40022	0,53451	0,48058	0,34466	0,32961
	0,52827	0,55977	0,34466	0,62413	0,40086
	0,50721	0,55281	0,32961	0,40086	0,65233

BAB 17

EMPAT TABEL STATISTIK

Pembahasan dalam buku ini melibatkan empat distribusi statistik berikut,

1. Distribusi Beta
2. Distribusi Chi-Squared
3. Distribusi Fisher F , dan
4. Distribusi Normal

Secara khusus, pembahasan tentang pengontrolan target proses berbasis observasi individual di Bab 4 memerlukan ketiga distribusi pertama; baik distribusi Beta, distribusi Chi-Squared, maupun distribusi F . Sedangkan Bab 5 (pengontrolan target proses berbasis observasi sub-grup berukuran konstan) memerlukan distribusi Chi-Squared dan distribusi F . Dan, Bab 6 (pengontrolan target proses berbasis observasi sub-grup berukuran tak konstan) memerlukan distribusi Chi-Squared saja.

Sementara itu, Bab 7 (pengontrolan variabilitas proses berbasis observasi individual) memerlukan distribusi Beta. Sangat menarik untuk dicatat, pembahasan pengontrolan variabilitas proses berbasis observasi sub-grup di Bab 8 – Bab 12 hanya bertumpu kepada distribusi Normal.

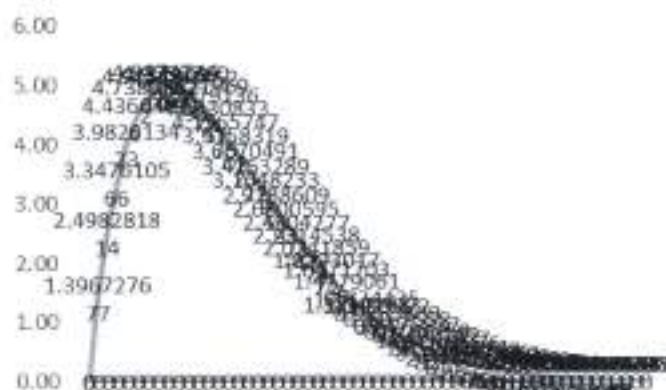
Di halaman-halaman terakhir buku ini kami sajikan empat tabel statistik yang berkaitan dengan keempat distribusi di atas.

1. Tabel Statistik Distribusi Beta

Distribusi Beta(p, q) memiliki fungsi kepadatan probabilitas (*probability density function* disingkat PDF) sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \text{ dengan } 0 < x < 1.$$

Adapun kurva dari PDF $f(x)$ berbentuk menceng ke kanan dengan $0 < x < 1$. Dari titik 0 ke titik 1 pada sumbu horizontal, mula-mula tampak gradient yang amat tinggi untuk kemudian menurun dengan curam lalu melandai ke arah titik 1 seperti tampak pada Gambar 17.1.



Gambar 17.1. Kurva PDF distribusi Beta(p, q)

Tabel distribusi Beta (Tabel 17.1) di bawah ini memberikan nilai absis x pada sumbu horizontal, antara 0 dan 1, yang memenuhi $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$ untuk berbagai nilai p, q , dan α . Cara menghitung nilai x dengan menggunakan MS Excel, cukup dengan menulis “BETA.INV($1 - \alpha, p, q$)” Sebagai contoh, untuk $p = 2, q = 12$ dan $\alpha = 0,0027$, maka $x =$ “=BETA.INV(0.9973,2,12)” = 0,47899.

Tabel 17.1. Nilai x sehingga $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$
 $X \sim \text{Beta}(p, q)$ dan $\alpha = 0,0027$

q	p					
	1	2	3	4	5	6
1	0,99730	0,99865	0,99910	0,99932	0,99946	0,99955
2	0,94804	0,96969	0,97848	0,98329	0,98634	0,98844
3	0,86075	0,91022	0,93312	0,94657	0,95547	0,96180
4	0,77205	0,84233	0,87809	0,90028	0,91551	0,92665
5	0,69361	0,77690	0,82234	0,85180	0,87266	0,88827
6	0,62684	0,71743	0,76961	0,80466	0,83012	0,84954
7	0,57041	0,66458	0,72118	0,76033	0,78938	0,81193
8	0,52256	0,61791	0,67725	0,71929	0,75108	0,77612
9	0,48168	0,57672	0,63758	0,68160	0,71542	0,74240
10	0,44648	0,54027	0,60180	0,64709	0,68238	0,71085
15	0,32585	0,40859	0,46731	0,51322	0,55077	0,58234
20	0,25601	0,32754	0,38056	0,42348	0,45964	0,49083
25	0,21068	0,27304	0,32055	0,35990	0,39371	0,42338
30	0,17893	0,23398	0,27673	0,31270	0,34404	0,37190
35	0,15548	0,20465	0,24338	0,27635	0,30538	0,33143
40	0,13745	0,18183	0,21716	0,24752	0,27446	0,29882
50	0,11156	0,14865	0,17862	0,20472	0,22816	0,24958
75	0,07583	0,10204	0,12367	0,14284	0,16036	0,17661
100	0,05743	0,07767	0,09455	0,10966	0,12358	0,13660

Tabel 17.1. (Lanjutan 1/2)

q	p					
	7	8	9	10	15	20
1	0,99961	0,99966	0,99970	0,99973	0,99982	0,99986
2	0,98998	0,99116	0,99209	0,99284	0,99515	0,99633
3	0,96656	0,97025	0,97321	0,97563	0,98321	0,98719
4	0,93517	0,94190	0,94736	0,95188	0,96630	0,97406
5	0,90042	0,91015	0,91814	0,92481	0,94653	0,95849
6	0,86490	0,87736	0,88769	0,89640	0,92525	0,94150
7	0,82999	0,84483	0,85724	0,86778	0,90331	0,92372
8	0,79642	0,81326	0,82747	0,83963	0,88124	0,90560
9	0,76452	0,78303	0,79876	0,81232	0,85937	0,88742
10	0,73441	0,75428	0,77130	0,78606	0,83793	0,86937
15	0,60941	0,63294	0,65365	0,67203	0,74013	0,78442
20	0,51817	0,54243	0,56416	0,58377	0,65924	0,71090
25	0,44980	0,47358	0,49514	0,51484	0,59284	0,64837
30	0,39699	0,41980	0,44070	0,45996	0,53790	0,59516
35	0,35509	0,37679	0,39681	0,41539	0,49192	0,54057
40	0,32110	0,34166	0,36074	0,37855	0,45297	0,51022
50	0,26937	0,28781	0,30508	0,32133	0,39075	0,44591
75	0,19185	0,20624	0,21990	0,23292	0,29039	0,33840
100	0,14891	0,16062	0,17181	0,18255	0,23085	0,27238

Tabel 17.1. (Lanjutan 2/2)

q	p					
	25	30	35	40	50	75
1	0,99989	0,99991	0,99992	0,99993	0,99995	0,99996
2	0,99705	0,99753	0,99788	0,99814	0,99851	0,99900
3	0,98964	0,99131	0,99251	0,99342	0,99471	0,99645
4	0,97891	0,98224	0,98465	0,98649	0,98910	0,99265
5	0,96607	0,97131	0,97515	0,97808	0,98226	0,98799
6	0,95193	0,95920	0,96455	0,96867	0,97457	0,98270
7	0,93700	0,94633	0,95325	0,95858	0,96628	0,97697
8	0,92164	0,93301	0,94149	0,94806	0,95758	0,97091
9	0,90610	0,91944	0,92946	0,93725	0,94861	0,96460
10	0,89054	0,90578	0,91729	0,92628	0,93944	0,95812
15	0,81566	0,83892	0,85694	0,87131	0,89282	0,92437
20	0,74870	0,77764	0,80054	0,81913	0,84751	0,89039
25	0,69022	0,72300	0,74941	0,77117	0,80496	0,85743
30	0,63935	0,67462	0,70349	0,72758	0,76556	0,82597
35	0,59496	0,63178	0,66232	0,68808	0,72925	0,79617
40	0,55605	0,59373	0,62534	0,65229	0,69585	0,76807
50	0,49125	0,52938	0,56197	0,59021	0,63678	0,71672
75	0,37958	0,41550	0,44722	0,47549	0,52384	0,61231
100	0,30891	0,34149	0,37085	0,39750	0,44418	0,53347

2. Tabel Statistik Distribusi Chi-Squared

Distribusi Chi-Squared dengan derajat kebebasan k memiliki PDF sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)2^{k/2}} x^{k/2-1} e^{-x/2} \text{ dengan } x > 0.$$

Kurva dari PDF $f(x)$ mirip dengan PDF distribusi Beta, namun daerah definisinya $x > 0$ dan bukan $0 < x < 1$. Dari titik 0 ke kanan pada sumbu horizontal, tampak gradient positif besar yang segera diikuti gradient yang amat tinggi dan kemudian menurun dengan sedikit curam ke arah kanan lalu melandai menuju tak berhingga seperti pada Gambar 17.2.



Gambar 17.2. Kurva PDF distribusi Chi-Squared

Tabel distribusi Chi-Squared (Tabel 17.2) di bawah ini memberikan nilai absis x pada sumbu horizontal yang memenuhi $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$ untuk berbagai nilai k dan α . Di dalam sistem MS Excel, nilai x dapat dihitung dengan menulis kalimat “=CHIINV(α, k)”. Sebagai contoh, untuk $k = 5$ dan $\alpha = 0,0027$, maka $x = \text{CHIINV}(0.0027, 5) = 18,20514$.

Tabel 17.2. Nilai x sehingga $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$
 $X \sim \text{Chi-Squared}(k)$

k	α					
	0,00135	0,0027	0,005	0,01	0,025	0,05
1	10,27288	8,99986	7,87944	6,63490	5,02389	3,84146
2	13,21530	11,82901	10,59663	9,21034	7,37776	5,99146
3	15,63040	14,15625	12,83816	11,34487	9,34840	7,81473
4	17,80041	16,25117	14,86026	13,27670	11,14329	9,48773
5	19,82127	18,20514	16,74960	15,08627	12,83250	11,07050
6	21,73905	20,06190	18,54758	16,81189	14,44938	12,59159
7	23,58004	21,84639	20,27774	18,47531	16,01276	14,06714
8	25,36094	23,57439	21,95495	20,09024	17,53455	15,50731
9	27,09313	25,25666	23,58935	21,66599	19,02277	16,91898
10	28,78479	26,90091	25,18818	23,20925	20,48318	18,30704
11	30,44202	28,51290	26,75685	24,72497	21,92005	19,67514
12	32,06954	30,09705	28,29952	26,21697	23,33666	21,02607
13	33,67107	31,65687	29,81947	27,68825	24,73560	22,36203
14	35,24960	33,19518	31,31935	29,14124	26,11895	23,68479
15	36,80761	34,71430	32,80132	30,57791	27,48839	24,99579
16	38,34714	36,21614	34,26719	31,99993	28,84535	26,29623
17	39,86993	37,70234	35,71847	33,40866	30,19101	27,58711
18	41,37744	39,17427	37,15645	34,80531	31,52638	28,86930
19	42,87095	40,63312	38,58226	36,19087	32,85233	30,14353
20	44,35157	42,07993	39,99685	37,56623	34,16961	31,41043
25	51,59127	49,16157	46,92789	44,31410	40,64647	37,65248
30	58,61544	56,04223	53,67196	50,89218	46,97924	43,77297
35	65,47653	62,77096	60,27477	57,34207	53,20335	49,80185
40	72,20864	69,37957	66,76596	63,69074	59,34171	55,75848
45	78,83539	75,89011	73,16606	69,95683	65,41016	61,65623
50	85,37397	82,31861	79,48998	76,15389	71,42020	67,50481
60	98,23558	94,97513	91,95170	88,37942	83,29767	79,08194
70	110,86713	107,41772	104,21490	100,42518	95,02318	90,53123
80	123,31656	119,69104	116,32106	112,32879	106,62857	101,87947
90	135,61717	131,82606	128,29894	124,11632	118,13589	113,14527
100	147,79320	143,84533	140,16949	135,80672	129,56120	124,34211

Tabel 17.2. (Lanjutan 1/1)

k	α					
	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9973	0,99865
1	0,00393	0,00098	0,00016	0,00004	0,00001	0,00000
2	0,10259	0,05064	0,02010	0,01003	0,00541	0,00270
3	0,35185	0,21580	0,11483	0,07172	0,04733	0,02971
4	0,71072	0,48442	0,29711	0,20699	0,15070	0,10577
5	1,14548	0,83121	0,55430	0,41174	0,31755	0,23796
6	1,63538	1,23734	0,87209	0,67573	0,54123	0,42337
7	2,16735	1,68987	1,23904	0,98926	0,81385	0,65622
8	2,73264	2,17973	1,64650	1,34441	1,12837	0,93059
9	3,32511	2,70039	2,08790	1,73493	1,47894	1,24125
10	3,94030	3,24697	2,55821	2,15586	1,86079	1,58375
11	4,57481	3,81575	3,05348	2,60322	2,27003	1,95435
12	5,22603	4,40379	3,57057	3,07382	2,70347	2,34994
13	5,89186	5,00875	4,10692	3,56503	3,15847	2,76791
14	6,57063	5,62873	4,66043	4,07467	3,63280	3,20603
15	7,26094	6,26214	5,22935	4,60092	4,12461	3,66241
16	7,96165	6,90766	5,81221	5,14221	4,63229	4,13544
17	8,67176	7,56419	6,40776	5,69722	5,15447	4,62371
18	9,39046	8,23075	7,01491	6,26480	5,68996	5,12601
19	10,11701	8,90652	7,63273	6,84397	6,23773	5,64125
20	10,85081	9,59078	8,26040	7,43384	6,79687	6,16850
25	14,61141	13,11972	11,52398	10,51965	9,73772	8,95856
30	18,49266	16,79077	14,95346	13,78672	12,87193	11,95411
35	22,46502	20,56938	18,50893	17,19182	16,15378	15,10703
40	26,50930	24,43304	22,16426	20,70654	19,55307	18,38540
45	30,61226	28,36615	25,90127	24,31101	23,04865	21,76678
50	34,76425	32,35736	29,70668	27,99075	26,62504	25,23469
60	43,18796	40,48175	37,48485	35,53449	33,97584	32,38279
70	51,73928	48,75756	45,44172	43,27518	41,53845	39,75816
80	60,39148	57,15317	53,54008	51,17193	49,26903	47,31391
90	69,12603	65,64662	61,75408	59,19630	57,13703	55,01732
100	77,92947	74,22193	70,06489	67,32756	65,12018	62,84450

3. Tabel Statistik Distribusi F

Distribusi $F(p,q)$ memiliki PDF sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{\Gamma((p+q)/2) \Gamma(p/2) \Gamma(q/2)}{\Gamma(p/2) \Gamma(q/2)} \frac{x^{p/2-1}}{(1+px/q)^{(p+q)/2}} \text{ dengan } x > 0.$$

Kurva dari $f(x)$ ini mirip dengan kurva PDF distribusi Chi-Squared dengan daerah definisi yang sama; $x > 0$. Dari titik 0 sedikit ke kanan pada sumbu horizontal, PDF itu tampak memiliki gradient positif kecil diikuti gradient yang amat tinggi, kemudian menurun dengan sangat curam ke arah kanan lalu melandai menuju tak berhingga.



Gambar 17.3. Kurva PDF distribusi F

Tabel distribusi F (Tabel 17.3) di bagian bawah berikut ini memberikan nilai absis x pada sumbu horizontal, sehingga $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$, untuk berbagai nilai p , q , dan α . Nilai x dapat diperoleh dengan menggunakan MS Excel. Untuk itu, cukup ditulis " $=F.INV(1 - \alpha, p, q)$ ". Sebagai contoh, untuk $p = 4$, $q = 24$ dan $\alpha = 0,0027$, maka $x = "=F.INV(0.9973, 4, 24)" = 5,51599$.

Tabel 17.3. Nilai x sehingga $\Pr(X < x) = 1 - \alpha$
 $X \sim F(p, q)$ dan $\alpha = 0,0027$

q	p					
	1	2	3	4	5	6
1	55393,94713	68386,60562	74125,70728	77160,07716	79067,49518	80375,12551
2	368,87105	369,37037	369,53691	369,62020	369,67018	369,70350
3	84,98446	75,85981	72,19217	70,19740	68,94103	68,07648
4	43,82535	36,49002	33,57707	31,99486	30,99732	30,30980
5	30,32688	24,13143	21,68755	20,36035	19,52252	18,94415
6	24,04912	18,54435	16,38176	15,20699	14,46442	13,95104
7	20,52009	15,46549	13,48506	12,40875	11,72758	11,25601
8	18,28911	13,54765	11,69336	10,68507	10,04625	9,60345
9	16,76251	12,25022	10,48793	9,52917	8,92113	8,49920
10	15,65698	11,31914	9,62669	8,70549	8,12074	7,71458
11	14,82167	10,62083	8,98313	8,09132	7,52478	7,13091
12	14,16947	10,07894	8,48523	7,61703	7,06509	6,68107
13	13,64674	9,64686	8,08928	7,24042	6,70044	6,32448
14	13,21877	9,29469	7,76726	6,93455	6,40454	6,03528
15	12,86217	9,00236	7,50048	6,68145	6,15987	5,79627
16	12,56059	8,75597	7,27601	6,46870	5,95434	5,59559
17	12,30230	8,54557	7,08462	6,28746	5,77936	5,42479
18	12,07866	8,36387	6,91956	6,13129	5,62866	5,27775
19	11,88319	8,20543	6,77579	5,99537	5,49755	5,14987
20	11,71090	8,06607	6,64948	5,87602	5,38249	5,03766
25	11,08626	7,56323	6,19486	5,44712	4,96936	4,63505
30	10,69489	7,25019	5,91278	5,18153	4,71388	4,38628
35	10,42689	7,03676	5,72091	5,00113	4,54050	4,21755
40	10,23194	6,88201	5,58203	4,87069	4,41522	4,09568
45	10,08380	6,76470	5,47688	4,77202	4,32050	4,00357
50	9,96742	6,67273	5,39453	4,69479	4,24638	3,93152
75	9,62932	6,40644	5,15655	4,47185	4,03261	3,72379
100	9,46627	6,27853	5,04247	4,36513	3,93036	3,62448

Tabel 17.3. (Lanjutan I/11) dan $\alpha = 0,0027$

q	p					
	7	8	9	10	15	20
1	81326,59694	82049,62929	82617,51194	83075,26267	84466,58787	85172,21827
2	369,72731	369,74516	369,75905	369,77015	369,80348	369,82015
3	67,44499	66,96344	66,58407	66,27745	65,34048	64,86205
4	29,80682	29,42270	29,11968	28,87448	28,12330	27,73848
5	18,52036	18,19624	17,94022	17,73281	17,09583	16,76842
6	13,57432	13,28581	13,05763	12,87257	12,30288	12,00911
7	10,90950	10,64380	10,43342	10,26261	9,73562	9,46302
8	9,27769	9,02761	8,82939	8,66832	8,17026	7,91187
9	8,18845	7,94965	7,76019	7,60609	7,12869	6,88031
10	7,41515	7,18485	7,00194	6,85307	6,39100	6,14996
11	6,84029	6,61656	6,43876	6,29393	5,84361	5,60812
12	6,39749	6,17901	6,00526	5,86362	5,42256	5,19136
13	6,04664	5,83244	5,66198	5,52293	5,08931	4,86150
14	5,76222	5,55156	5,38382	5,24691	4,81937	4,59429
15	5,52723	5,31956	5,15410	5,01898	4,59649	4,37364
16	5,32999	5,12486	4,96134	4,82774	4,40950	4,18849
17	5,16217	4,95923	4,79738	4,66509	4,25047	4,03099
18	5,01771	4,81668	4,65629	4,52512	4,11362	3,89542
19	4,89211	4,69276	4,53363	4,40346	3,99465	3,77755
20	4,78192	4,58406	4,42605	4,29675	3,89030	3,67414
25	4,38671	4,19426	4,04034	3,91418	3,51608	3,30303
30	4,14264	3,95361	3,80225	3,67805	3,28495	3,07354
35	3,97717	3,79049	3,64088	3,51800	3,12819	2,91771
40	3,85768	3,67272	3,52437	3,40245	3,01494	2,80502
45	3,76738	3,58372	3,43634	3,31513	2,92931	2,71974
50	3,69676	3,51413	3,36750	3,24685	2,86232	2,65296
75	3,49320	3,31355	3,16909	3,05005	2,66901	2,45997
100	3,39591	3,21770	3,07428	2,95599	2,57649	2,36739

Tabel 17.3. (Lanjutan 2/11) dan $\alpha = 0,0027$

q	p					
	25	30	40	50	75	100
1	85598,71753	85884,33359	86242,78214	86458,60647	86747,24537	86891,93642
2	369,83015	369,83681	369,84515	369,85015	369,85681	369,86015
3	64,57171	64,37676	64,13149	63,98348	63,78512	63,68550
4	27,50448	27,34714	27,14892	27,02915	26,86847	26,78769
5	16,56892	16,43458	16,26510	16,16256	16,02483	15,95551
6	11,82972	11,70875	11,55592	11,46333	11,33881	11,27607
7	9,29622	9,18357	9,04106	8,95460	8,83816	8,77942
8	7,75344	7,64630	7,51055	7,42808	7,31687	7,26071
9	6,72773	6,62439	6,49329	6,41354	6,30585	6,25139
10	6,00161	5,90101	5,77321	5,69535	5,59008	5,53678
11	5,46293	5,36435	5,23893	5,16242	5,05885	5,00635
12	5,04858	4,95151	4,82786	4,75233	4,64995	4,59798
13	4,72059	4,62468	4,50234	4,42753	4,32597	4,27437
14	4,45486	4,35984	4,23849	4,16419	4,06320	4,01183
15	4,23539	4,14106	4,02046	3,94653	3,84591	3,79467
16	4,05118	3,95741	3,83737	3,76369	3,66330	3,61211
17	3,89445	3,80111	3,68149	3,60798	3,50770	3,45651
18	3,75952	3,66652	3,54720	3,47380	3,37355	3,32231
19	3,64217	3,54943	3,43033	3,35698	3,25669	3,20537
20	3,53919	3,44666	3,32771	3,25437	3,15399	3,10256
25	3,16934	3,07731	2,95845	2,88481	2,78347	2,73127
30	2,94034	2,84832	2,72903	2,65480	2,55216	2,49903
35	2,78465	2,69248	2,57257	2,49767	2,39366	2,33958
40	2,67194	2,57953	2,45896	2,38340	2,27806	2,22305
45	2,58657	2,49389	2,37267	2,29648	2,18988	2,13400
50	2,51965	2,42672	2,30488	2,22809	2,12032	2,06362
75	2,32592	2,23186	2,10754	2,02842	1,91598	1,85596
100	2,23275	2,13792	2,01193	1,93123	1,81558	1,75319

Tabel 17.3. (Lanjutan 3/11) dan $\alpha = 0,010$

q	p					
	1	2	3	4	5	6
1	4052,18070	4999,50000	5403,35201	5624,58333	5763,64955	5858,98611
2	98,50251	99,00000	99,16620	99,24937	99,29930	99,33259
3	34,11622	30,81652	29,45670	28,70990	28,23708	27,91066
4	21,19769	18,00000	16,69437	15,97702	15,52186	15,20686
5	16,25818	13,27393	12,05995	11,39193	10,96702	10,67225
6	13,74502	10,92477	9,77954	9,14830	8,74590	8,46613
7	12,24638	9,54658	8,45129	7,84665	7,46044	7,19140
8	11,25862	8,64911	7,59099	7,00608	6,63183	6,37068
9	10,56143	8,02152	6,99192	6,42209	6,05694	5,80177
10	10,04429	7,55943	6,55231	5,99434	5,63633	5,38581
11	9,64603	7,20571	6,21673	5,66830	5,31601	5,06921
12	9,33021	6,92661	5,95254	5,41195	5,06434	4,82057
13	9,07381	6,70096	5,73938	5,20533	4,86162	4,62036
14	8,86159	6,51488	5,56389	5,03538	4,69496	4,45582
15	8,68312	6,35887	5,41696	4,89321	4,55561	4,31827
16	8,53097	6,22624	5,29221	4,77258	4,43742	4,20163
17	8,39974	6,11211	5,18500	4,66897	4,33594	4,10151
18	8,28542	6,01290	5,09189	4,57904	4,24788	4,01464
19	8,18495	5,92588	5,01029	4,50026	4,17077	3,93857
20	8,09596	5,84893	4,93819	4,43069	4,10268	3,87143
25	7,76980	5,56800	4,67546	4,17742	3,85496	3,62717
30	7,56248	5,39035	4,50974	4,01788	3,69902	3,47348
35	7,41912	5,26794	4,39575	3,90824	3,59191	3,36793
40	7,31410	5,17851	4,31257	3,82829	3,51384	3,29101
45	7,23387	5,11032	4,24921	3,76743	3,45442	3,23247
50	7,17058	5,05661	4,19934	3,71955	3,40768	3,18643
75	6,98536	4,89988	4,05402	3,58011	3,27163	3,05244
100	6,89530	4,82391	3,98370	3,51268	3,20587	2,98768

Tabel 17.3: (Lanjutan 4/11) dan $\alpha = 0,010$.

q	p					
	7	8	9	10	15	20
1	5928,35573	5981,07031	6022,47324	6055,84671	6157,28462	6208,73022
2	99,35637	99,37421	99,38809	99,39920	99,43251	99,44917
3	27,67170	27,48918	27,34521	27,22873	26,87219	26,68979
4	14,97576	14,79889	14,65913	14,54590	14,19820	14,01961
5	10,45551	10,28931	10,15776	10,05102	9,72222	9,55265
6	8,26000	8,10165	7,97612	7,87412	7,55899	7,39583
7	6,99283	6,84005	6,71875	6,62006	6,31433	6,15544
8	6,17762	6,02887	5,91062	5,81429	5,51512	5,35909
9	5,61287	5,46712	5,35113	5,25654	4,96208	4,80800
10	5,20012	5,05669	4,94242	4,84915	4,55814	4,40539
11	4,88607	4,74447	4,63154	4,53928	4,25087	4,09905
12	4,63950	4,49937	4,38751	4,29605	4,00962	3,85843
13	4,44100	4,30206	4,19108	4,10027	3,81537	3,66461
14	4,27788	4,13995	4,02968	3,93940	3,65570	3,50522
15	4,14155	4,00445	3,89479	3,80494	3,52219	3,37189
16	4,02595	3,88957	3,78042	3,69093	3,40895	3,25874
17	3,92672	3,79096	3,68224	3,59307	3,31169	3,16152
18	3,84064	3,70542	3,59707	3,50816	3,22729	3,07710
19	3,76527	3,63052	3,52250	3,43382	3,15334	3,00311
20	3,69874	3,56441	3,45668	3,36819	3,08804	2,93774
25	3,45675	3,32394	3,21722	3,12941	2,85019	2,69932
30	3,30450	3,17262	3,06652	2,97909	2,70018	2,54866
35	3,19995	3,06872	2,96301	2,87583	2,59697	2,44481
40	3,12376	2,99298	2,88756	2,80055	2,52162	2,36888
45	3,06577	2,93534	2,83013	2,74323	2,46418	2,31093
50	3,02017	2,89001	2,78496	2,69814	2,41896	2,26524
75	2,88744	2,75804	2,65343	2,56682	2,28700	2,13163
100	2,82330	2,69426	2,58984	2,50331	2,22301	2,06665

Tabel 17.3. (Lanjutan 5/11) dan $\alpha = 0,010$

q	p					
	25	30	40	50	75	100
1	6239,82511	6260,64858	6286,78205	6302,51719	6323,56103	6334,11004
2	99,45917	99,46583	99,47416	99,47916	99,48583	99,48916
3	26,57898	26,50453	26,41081	26,35423	26,27836	26,24024
4	13,91085	13,83766	13,74538	13,68958	13,61467	13,57699
5	9,44912	9,37933	9,29119	9,23781	9,16605	9,12991
6	7,29597	7,22853	7,14322	7,09148	7,02180	6,98667
7	6,05795	5,99201	5,90845	5,85768	5,78923	5,75466
8	5,26314	5,19813	5,11561	5,06540	4,99759	4,96330
9	4,71303	4,64858	4,56665	4,51671	4,44918	4,41498
10	4,31106	4,24693	4,16529	4,11545	4,04795	4,01372
11	4,00509	3,94113	3,85957	3,80972	3,74208	3,70774
12	3,76469	3,70079	3,61918	3,56922	3,50135	3,46684
13	3,57096	3,50704	3,42529	3,37518	3,30700	3,27228
14	3,41159	3,34760	3,26564	3,21533	3,14679	3,11184
15	3,27822	3,21411	3,13191	3,08137	3,01243	2,97724
16	3,16497	3,10073	3,01825	2,96748	2,89812	2,86267
17	3,06764	3,00324	2,92046	2,86944	2,79965	2,76393
18	2,98308	2,91852	2,83542	2,78414	2,71392	2,67793
19	2,90894	2,84420	2,76079	2,70925	2,63858	2,60232
20	2,84340	2,77848	2,69475	2,64295	2,57184	2,53531
25	2,60411	2,53831	2,45299	2,39994	2,32668	2,28883
30	2,45260	2,38597	2,29921	2,24501	2,16978	2,13071
35	2,34800	2,28063	2,19260	2,13738	2,06038	2,02019
40	2,27140	2,20338	2,11423	2,05811	1,97954	1,93834
45	2,21286	2,14428	2,05415	1,99723	1,91724	1,87513
50	2,16666	2,09759	2,00659	1,94896	1,86770	1,82475
75	2,03123	1,96040	1,86626	1,80602	1,71996	1,67378
100	1,96515	1,89325	1,79718	1,73529	1,64607	1,59767

Tabel 17.3. (Lanjutan 6/11) dan $\alpha = 0,025$

q	p					
	1	2	3	4	5	6
1	647,78901	799,50000	864,16297	899,58331	921,84790	937,11108
2	38,50633	39,00000	39,16549	39,24842	39,29823	39,33146
3	17,44344	16,04411	15,43918	15,10098	14,88482	14,73472
4	12,21786	10,64911	9,97920	9,60453	9,36447	9,19731
5	10,00698	8,43362	7,76359	7,38789	7,14638	6,97770
6	8,81310	7,25986	6,59880	6,22716	5,98757	5,81976
7	8,07267	6,54152	5,88982	5,52259	5,28524	5,11860
8	7,57088	6,05947	5,41596	5,05263	4,81728	4,65170
9	7,20928	5,71471	5,07812	4,71808	4,48441	4,31972
10	6,93673	5,45640	4,82562	4,46834	4,23609	4,07213
11	6,72413	5,25589	4,63002	4,27507	4,04400	3,88065
12	6,55377	5,09587	4,47418	4,12121	3,89113	3,72829
13	6,41425	4,96527	4,34718	3,99590	3,76667	3,60426
14	6,29794	4,85670	4,24173	3,89191	3,66342	3,50136
15	6,19950	4,76505	4,15280	3,80427	3,57642	3,41466
16	6,11513	4,68667	4,07682	3,72942	3,50212	3,34063
17	6,04201	4,61887	4,01116	3,66475	3,43794	3,27669
18	5,97805	4,55967	3,95386	3,60834	3,38197	3,22092
19	5,92163	4,50753	3,90343	3,55871	3,33272	3,17184
20	5,87149	4,46126	3,85870	3,51470	3,28906	3,12834
25	5,68637	4,29093	3,69427	3,35301	3,12868	2,96855
30	5,56753	4,18206	3,58936	3,24993	3,02647	2,86670
35	5,48482	4,10650	3,51663	3,17851	2,95566	2,79614
40	5,42394	4,05099	3,46326	3,12611	2,90372	2,74438
45	5,37725	4,00850	3,42243	3,08605	2,86401	2,70480
50	5,34032	3,97493	3,39019	3,05441	2,83265	2,67335
75	5,23171	3,87642	3,29567	2,96172	2,74079	2,58199
100	5,17859	3,82837	3,24962	2,91658	2,69606	2,53740

Tabel 17.3. (Lanjutan 7/11) dan $\alpha = 0,025$

q	p					
	7	8	9	10	15	20
1	948,21689	956,65622	963,28458	968,62744	984,86684	993,10280
2	39,35521	39,37302	39,38688	39,39797	39,43126	39,44791
3	14,62440	14,53989	14,47308	14,41894	14,25271	14,16738
4	9,07414	8,97958	8,90468	8,84388	8,65654	8,55994
5	6,85308	6,75717	6,68105	6,61915	6,42773	6,32856
6	5,69547	5,59962	5,52341	5,46132	5,26867	5,16840
7	4,99491	4,89934	4,82322	4,76112	4,56779	4,46674
8	4,52856	4,43326	4,35723	4,29513	4,10121	3,99945
9	4,19705	4,10196	4,02599	3,96387	3,76936	3,66691
10	3,94982	3,85489	3,77896	3,71679	3,52167	3,41854
11	3,75864	3,66382	3,58790	3,52567	3,32993	3,22614
12	3,60651	3,51178	3,43585	3,37355	3,17720	3,07277
13	3,48267	3,38799	3,31203	3,24967	3,05271	2,94767
14	3,37993	3,28529	3,20930	3,14686	2,94932	2,84369
15	3,29336	3,19874	3,12271	3,06020	2,86209	2,75590
16	3,21943	3,12482	3,04875	2,98616	2,78752	2,68079
17	3,15558	3,06097	2,98486	2,92219	2,72303	2,61580
18	3,09988	3,00527	2,92911	2,86638	2,66672	2,55900
19	3,05087	2,95626	2,88005	2,81725	2,61712	2,50894
20	3,00742	2,91280	2,83655	2,77367	2,57310	2,46448
25	2,84780	2,75311	2,67664	2,61347	2,41095	2,30045
30	2,74603	2,65126	2,57461	2,51119	2,30715	2,19516
35	2,67551	2,58066	2,50387	2,44025	2,23499	2,12179
40	2,62378	2,52886	2,45194	2,38816	2,18190	2,06771
45	2,58421	2,48924	2,41220	2,34829	2,14121	2,02619
50	2,55297	2,45794	2,38082	2,31679	2,10900	1,99329
75	2,46141	2,36619	2,28877	2,22437	2,01420	1,89624
100	2,41681	2,32148	2,24389	2,17928	1,96793	1,84856

Tabel 17.3. (Lanjutan 8/11) dan $\alpha = 0,025$

q	p					
	25	30	40	50	75	100
1	998,08079	1001,41441	1005,59810	1008,11712	1011,48600	1013,17477
2	39,45790	39,46457	39,47290	39,47789	39,48456	39,48789
3	14,11545	14,08052	14,03651	14,00991	13,97422	13,95628
4	8,50100	8,46127	8,41113	8,38078	8,34000	8,31947
5	6,26786	6,22688	6,17505	6,14362	6,10132	6,08000
6	5,10686	5,06523	5,01247	4,98042	4,93722	4,91541
7	4,40455	4,36239	4,30888	4,27631	4,23233	4,21009
8	3,93666	3,89402	3,83978	3,80672	3,76199	3,73934
9	3,60353	3,56041	3,50547	3,47192	3,42647	3,40341
10	3,35460	3,31102	3,25540	3,22137	3,17519	3,15174
11	3,16164	3,11762	3,06133	3,02684	2,97996	2,95611
12	3,00774	2,96328	2,90635	2,87141	2,82384	2,79960
13	2,88212	2,83725	2,77969	2,74432	2,69608	2,67146
14	2,77765	2,73238	2,67422	2,63842	2,58954	2,56456
15	2,68940	2,64374	2,58501	2,54880	2,49928	2,47394
16	2,61384	2,56781	2,50853	2,47193	2,42180	2,39612
17	2,54842	2,50204	2,44223	2,40525	2,35453	2,32851
18	2,49122	2,44450	2,38418	2,34684	2,29555	2,26920
19	2,44077	2,39374	2,33292	2,29523	2,24339	2,21673
20	2,39594	2,34860	2,28732	2,24929	2,19692	2,16994
25	2,23030	2,18162	2,11826	2,07872	2,02393	1,99553
30	2,12372	2,07394	2,00887	1,96806	1,91120	1,88157
35	2,04930	1,99862	1,93212	1,89023	1,83159	1,80087
40	1,99434	1,94292	1,87520	1,83238	1,77219	1,74050
45	1,95208	1,90001	1,83125	1,78764	1,72607	1,69352
50	1,91856	1,86594	1,79627	1,75195	1,68917	1,65585
75	1,81937	1,76486	1,69203	1,64518	1,57790	1,54162
100	1,77047	1,71485	1,64011	1,59169	1,52152	1,48325

Tabel 17.3. (Lanjutan 9/11) dan $\alpha = 0,050$

q	p					
	1	2	3	4	5	6
1	161,44764	199,50000	215,70735	224,58324	230,16188	233,98600
2	18,51282	19,00000	19,16429	19,24679	19,29641	19,32953
3	10,12796	9,55209	9,27663	9,11718	9,01346	8,94065
4	7,70865	6,94427	6,59138	6,38823	6,25606	6,16313
5	6,60789	5,78614	5,40945	5,19217	5,05033	4,95029
6	5,98738	5,14325	4,75706	4,53368	4,38737	4,28387
7	5,59145	4,73741	4,34683	4,12031	3,97152	3,86597
8	5,31766	4,45897	4,06618	3,83785	3,68750	3,58058
9	5,11736	4,25649	3,86255	3,63309	3,48166	3,37375
10	4,96460	4,10282	3,70826	3,47805	3,32583	3,21717
11	4,84434	3,98230	3,58743	3,35669	3,20387	3,09461
12	4,74723	3,88529	3,49029	3,25917	3,10588	2,99612
13	4,66719	3,80557	3,41053	3,17912	3,02544	2,91527
14	4,60011	3,73889	3,34389	3,11225	2,95825	2,84773
15	4,54308	3,68232	3,28738	3,05557	2,90129	2,79046
16	4,49400	3,63372	3,23887	3,00692	2,85241	2,74131
17	4,45132	3,59153	3,19678	2,96471	2,81000	2,69866
18	4,41387	3,55456	3,15991	2,92774	2,77285	2,66130
19	4,38075	3,52189	3,12735	2,89511	2,74006	2,62832
20	4,35124	3,49283	3,09839	2,86608	2,71089	2,59898
25	4,24170	3,38519	2,99124	2,75871	2,60299	2,49041
30	4,17088	3,31583	2,92228	2,68963	2,53355	2,42052
35	4,12134	3,26742	2,87419	2,64147	2,48514	2,37178
40	4,08475	3,23173	2,83875	2,60597	2,44947	2,33585
45	4,05661	3,20432	2,81154	2,57874	2,42209	2,30827
50	4,03431	3,18261	2,79001	2,55718	2,40041	2,28644
75	3,96847	3,11864	2,72659	2,49370	2,33658	2,22111
100	3,93614	3,08730	2,69553	2,46261	2,30532	2,19060

Tabel 17.3. (Lanjutan 10/11) dan $\alpha = 0,050$

q	p					
	7	8	9	10	15	20
1	236,76840	238,88269	240,54325	241,88175	245,94993	248,01308
2	19,35322	19,37099	19,38483	19,39590	19,42914	19,44577
3	8,88674	8,84524	8,81230	8,78552	8,70287	8,66019
4	6,09421	6,04104	5,99878	5,96437	5,85781	5,80254
5	4,87587	4,81832	4,77247	4,73506	4,61876	4,55813
6	4,20666	4,14680	4,09002	4,05996	3,93806	3,87419
7	3,78704	3,72573	3,67667	3,63652	3,51074	3,44452
8	3,50046	3,43810	3,38813	3,34716	3,21841	3,15032
9	3,29275	3,22958	3,17889	3,13728	3,00610	2,93646
10	3,13546	3,07166	3,02038	2,97824	2,84502	2,77402
11	3,01233	2,94799	2,89622	2,85362	2,71864	2,64645
12	2,91336	2,84857	2,79638	2,75339	2,61685	2,54359
13	2,83210	2,76691	2,71436	2,67102	2,53311	2,45888
14	2,76420	2,69867	2,64579	2,60216	2,46300	2,38790
15	2,70663	2,64080	2,58763	2,54372	2,40345	2,32754
16	2,65720	2,59110	2,53767	2,49351	2,35222	2,27557
17	2,61430	2,54796	2,49429	2,44992	2,30769	2,23035
18	2,57672	2,51016	2,45628	2,41170	2,26862	2,19065
19	2,54353	2,47677	2,42270	2,37793	2,23406	2,15550
20	2,51401	2,44706	2,39281	2,34788	2,20327	2,12416
25	2,40473	2,33706	2,28210	2,23647	2,08889	2,00747
30	2,33434	2,26616	2,21070	2,16458	2,01480	1,93165
35	2,28524	2,21668	2,16083	2,11434	1,96288	1,87838
40	2,24902	2,18017	2,12403	2,07725	1,92446	1,83886
45	2,22122	2,15213	2,09576	2,04874	1,89487	1,80837
50	2,19920	2,12992	2,07335	2,02614	1,87138	1,78412
75	2,13431	2,06444	2,00726	1,95945	1,80182	1,71210
100	2,10251	2,03233	1,97483	1,92669	1,76753	1,67643

4. Tabel Statistik Distribusi Normal Standar

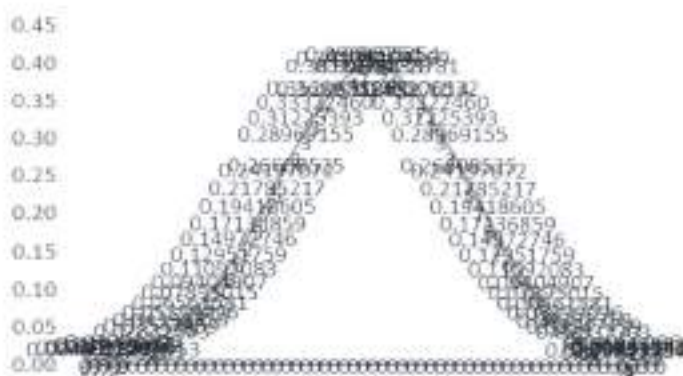
Misalkan kita memiliki sebuah populasi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\sigma > 0$. Kalau kita tuliskan $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, maka populasi $Z \sim N(0,1)$. Distribusi dari Z ini terkenal dengan nama distribusi normal standar. Nah, karena untuk berapapun nilai μ dan σ berlaku kesamaan,

$$\Pr(a < X < b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

maka untuk menghitung nilai probabilitas di ruas kiri cukup kita gunakan tabel distribusi Z . PDF dari Z adalah,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \text{ dengan } -\infty < z < \infty,$$

dan kurvanya simetris terhadap sumbu vertikal melalui titik $x = 0$ seperti tampak pada Gambar 17.4.



Gambar 17.4. Kurva PDF distribusi $N(0,1)$

Tabel distribusi normal standar (Tabel 17.4) di halaman berikutnya memberikan nilai α yang memenuhi $\Pr(Z < z) = 1 - \alpha$ untuk berbagai nilai z . Cara menghitung nilai α di dalam sistem MS Excel adalah dengan menulis "`=NORMDIST(z,0,1,TRUE)`". Sebagai contoh, jika $z = 1,15$, maka $\alpha = \text{"=NORMDIST(1.15,0,1,TRUE)"} = 0.87493$.

Tabel 17.4. Nilai α sehingga $\Pr(Z < z) = 1 - \alpha$
 $Z \sim N(0,1)$

Angka kedua di belakang koma desimal					
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97383
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916

Tabel 17.4. (Lanjutan 1/1)

Angka kedua di belakang koma desimal

z	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929

DAFTAR KARYA ILMIAH RUJUKAN

1. Alt, F.B. and Smith, N.D. (1988). Multivariate process control. In Krishnaiah, P.R., Rao, C.R. (Ed.) *Handbook of Statistics* (p. 333-351). Elsevier Science.
2. Anderson, T.W. (1966). *Introduction to multivariate statistical analysis*, 1st Edition. John Wiley & Sons, New York.
3. Anderson, T.W. (1984). *Introduction to multivariate statistical analysis*, 2nd Edition. Wiley-Interscience, New York.
4. Asrah, N.M. (2019). Effective vector variance in modeling malaysia highway traffic network, PhD Thesis, Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
5. Asrah, N.M., Djauhari, M.A., and Mohamad, I. (2018). The most important centrality measures in PLUS highway traffic network: An approach based on effective variance. <https://doi.org/10.1063/1.5041694>
6. Beamon, B.M., and Ware, T.M. (1998). A process quality model for the analysis, improvement and control of supply chain systems. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 28, p. 704-715.
7. Carlos Garcia-Diaz, J. (2007). The 'effective variance' control chart for monitoring the dispersion process with missing data. *European Journal of Industrial Engineering*, 1(1), DOI: 10.1504/EJIE.2007.012653.
8. Cleroux, R., Ducharme, G.R. (1989). Vector correlation for elliptical distributions. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 18(4), p. 1441-1454.
9. Da Costa, Jr. N., Nunes, S., Ceretta, P., and Da Silva, S. (2005). Stock-market comovements revisited. *Economics Bulletin*, 7, p. 1-9.
10. Djauhari, M.A. (2005). Improved monitoring of multivariate process variability. *Journal Quality of Technology*, 37(1), p. 32-39.
11. Djauhari, M.A. (2007). A measure of multivariate data concentration. *Journal of Applied Probability & Statistics*, 2(2), p. 139-155.
12. Djauhari, M.A. (2009). Asymptotic Distribution of Sample Covariance Determinant. *MATEMATIKA*, 25(1), p. 79-85.
13. Djauhari, M.A. (2010). A Multivariate Process Variability Monitoring Based on Individual Observations. *Modern Applied Science*, 4(10).
14. Djauhari, M.A. (2016). *Advanced monitoring techniques for complex process variability in manufacturing industry*. Universiti Putra Malaysia Press, Serdang, Malaysia.
15. Djauhari, M.A. (2017). Monitoring complex industrial process variability: A necessary and sufficient Shewhart-type control chart. The Eight International Conference on Research and Education in Mathematics, Institut Teknologi Bandung, Indonesia, August 2017.

16. Djauhari, M.A., and Mohamad, I. (2010). How to control process variability more effectively: the case in b-complex vitamin production process. *South African Journal of Industrial Engineering*, 21(21), p. 207-215.
17. Djauhari, M.A., Asrah, N.M., Irianto, I., and Ibrahim, N.A. (2019). Monitoring Variability in Complex Manufacturing Process: Data Analysis Viewpoint with Application. *Journal of Supply Chain Management*, 8(2):1-8
18. Djauhari, M.A., Mashuri, M., and Herwindiati, D.E. (2008). Multivariate process variability monitoring. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 37, p. 1742-1754.
19. Djauhari, M.A., Sagadavan, R., and Lee, S.L. (2016). Monitoring multivariate process variability when sub-group size is small. *Quality Engineering*, 28(4):429-440, DOI: 10.1080/08982112.2016.1166386
20. Djauhari, M.A., Sagadavan, R., and Lee, S.L. (2017). Monitoring the disparity of teaching and learning process variability: A statistical approach. *International Journal of Productivity and Quality Management*, 21(4):532. DOI: 10.1504/IJPMQ.2017.085259
21. Djauhari, M.A., Salleh, R.M., Zolkeply, Z., and Lee, S.L. (2016). On The reliability of Shewhart-type control charts for multivariate process variability. DOI: 10.1063/1.4982866.
22. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., and Herwindiati, D.E. (2018). *Reliable Shewhart-type control charts for multivariate process variability*. Lambert Academic Publishing, Printed in Singapore.
23. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Betrouwbare Shewhart-type controlediagrammen voor Multivariate Procesvariabiliteit*. Uitgeverij Onze Kennis, ISBN: 978-620-2-59876-7
24. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Cartes de contrôle fiables de type Shewhart pour la variabilité des processus à plusieurs variables*. Editions Notre Savoir, ISBN: 978-620-2-59872-9
25. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Grafici di controllo affidabili di tipo Shewhart-type per la variabilità di processo multivariate*. Edizioni Sapienza, ISBN: 978-620-2-59875-0
26. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Gráficos de Controle fiáveis do tipo Shewhart-type para Variabilidade Multivariada do Processo*. Edições Nosso Conhecimento, ISBN: 978-620-2-59874-3
27. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Gráficos de control fiables de tipo Shewhart para la variabilidad multivariante de los procesos*. Ediciones Nuestro Conocimiento, ISBN: 978-620-2-59873-6
28. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Niezawodne wykresy kontrolne typu Shewhart-type Control Charts dla wielowymiarowej zmienności procesu*. Wydawnictwo Nasza Wiedza, ISBN: 978-620-2-59877-4
29. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Zuverlässige Shewhart-Kontrollkarten für multivariate Prozessvariabilität*. Verlag Unser Wissen, ISBN: 978-620-2-59871-2

30. Djauhari, M.A., Zolkeply, Z., dan Herwindiati, D.E. (2020). *Надежные диаграммы управления типа Shewhart- для многомерной переменной процесса*. Scientia Scripts, ISBN: 978-620-2-59878-1
31. Edelman, A., and Rao, N.R. (2005). Random matrix theory. *Acta Numerica*, 14, p. 233-297.
32. Escoufier, Y. (1973). Le traitement des variables vectorielles. *Biometrics* 29, p. 751-760.
33. Florac, A.W., Carleton, A.D., and Barnard, J.R. (2000). Statistical process control: Analyzing a space shuttle onboard software process. *IEEE Software*, July/August, p. 97-106.
34. General Electric (1998). Annual Report, accessed on 15 March 2018 from: www.annualreports.com/HostedData/AnnualReportArchive/g/NYSE_GE_1998.pdf
35. Grambow, S., Stromberg, A.J. (1998). Combining the EID and FSA for computing the minimum volume ellipsoid, Department of Statistics, University of Kentucky.
36. Hanslik, T., Boelle, P., and Flahault, A. (2001). The control chart: An epidemiological tool for public health monitoring. *Public Health*, 115, p. 277-281.
37. Herwindiati, D.E., Djauhari, M.A., and Mashuri, M. (2007). Robust Multivariate Outlier Labeling. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 36(6): 1287-1294. <http://dx.doi.org/10.1080/03610910701569044>
38. Hoerl, R.W., and Snee, R.D. (2012). *Statistical Thinking*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
39. Hogg, R.V., dan Craig, A.T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. Fourth Edition. Macmillan Publishing Co., Inc. New York.
40. Hotelling, H. (1931). The generalization of Student's ratio. Presented at the meeting of American Mathematical Society at Berkeley, April 11, 1931.
41. Hotelling, H. (1931). The generalization of Student's ratio. *Annals of Mathematical Statistics*, 2(3): 360-378.
42. Hotelling, H. (1947) Multivariate Quality Control Illustrated by Air Testing of Sample Bombsights. In: Eisenhart, C., Hastay, M.W. and Wallis, W.A., Eds., *Techniques of Statistical Analysis*, McGraw Hill, New York, 111-184.
43. Hubert, M., Rousseeuw, P.J., and van Aelst, S. (2008). High-breakdown robust multivariate methods. *Statistical Science*, 23(1), p. 92-119.
44. Jakolte, P., and Saxena, A. (2002). Optimum control limits for employing statistical process control in software process. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 28, p. 1126-1134.
45. Jaupi, L. (2002). *Contrôle de la Qualité MSP: Analyse des performances, Contrôle de réception*, DUNOD, Paris. ISBN: ISBN 2 10 004264 5
46. Kazemilari, M., dan Djauhari, M.A. (2015). Correlation network analysis for multi-dimensional data in stocks market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 429, DOI: 10.1016/j.physa.2015.02.052
47. Kollo, T., and von Rossen, D. (2005). *Advanced multivariate statistics with matrices*. Springer, The Netherlands.
48. Kruegel, C., Valuer, F., and Vigna, G. (2005). *Intrusion detection and correlation, challenges and solutions*. Springer Science + Business Media, Inc., Boston.

49. Larzac, A., and Cleroux, R. (1992). Tests d'homogénéité entre indices de redondance pour des lois elliptiques. *Revue de statistique appliquée*, 40(3), p. 19-33.
50. Mardia, K.V., Kent, J.T., Bibby, J.M. (2000). *Multivariate Analysis*, 7th Printing. Academic Press, London.
51. Mason, R.L., Tracy, N.D., and Young, J.C. (1995). Decomposition of T^2 for multivariate control chart interpretation. *Journal of Quality Technology*, 27: 88-108.
52. Mason, R.L., Chou, Y.M., and Young, J.C. (2009) Monitoring variation in a multivariate process when the dimension is large relative to the sample size. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38, p. 939-951.
53. Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Edition. Wiley, New York.
54. Montgomery, D.C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*. 5th Edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.
55. Montgomery, D.C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. 6th Edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.
56. Montgomery, D.C. (2019). *Introduction to Statistical Quality Control*. 8th Edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.
57. Muirhead, R.J. (1982). *Aspect of multivariate statistical theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
58. Neave, H.R. (1990). *The Deming Dimension*, SPC Press, Knoxville, Tennessee.
59. Pena, D., and Rodriguez, J. (2005). Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence. Accessed on 4 April 2017 from: <http://halweb.uc3m.es/esp/personal/dpena/article/JVMA03.PDF>
60. Ragea, V. (2003). Testing correlation stability during hectic financial markets. *Financial Market and Portfolio Management*, 17, p. 289-380.
61. Razali, N., and Wah, B. (2011). Power comparison of Shaphiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical Modelling and Analytics*. 2, p.21-33.
62. Reis, M.S., and Rato, T.J. (2013). Large-scale statistical process control: Should we use partial or marginal correlations? *American Institute of Chemical Engineers (AIChE)*. Paper presented at the Annual Meeting, November 3-8, 2013, Hotel San Francisco Union Square, San Francisco, <https://aiche.confex.com/aiche/2013/webprogram/Paper317381.html>
63. Roes, K.C.B., and Dorr, D. (1997). Implementing statistical process control in service processes. *International Journal of Quality Science*, 2, p. 149-66.
64. Rousseeuw, P.J. (1985). Multivariate estimation with high breakdown point. In: Grossman, B. W., Pflug, G., Vincze, I., Wertz, W. (Ed). *Mathematical Statistics and Applications* (p. 283-297). D. Reidel Publishing Company.
65. Ryan, T.P. (2011). *Statistical methods for quality improvement*. 3rd Edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
66. Sellick, J.A. Jr. (1993). The use of statistical process control charts in hospital epidemiology. *Infection Control and Hospital Epidemiology*, 14, p. 649-56.

67. Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley, New York.
68. Shahian, D.M., Williamson, W.A., Svensson, L.G., Restuccia, J.D., and d'Agostino, R.S. (1996). Applications of statistical quality control to cardiac surgery. *Annals of Thoracic Surgery*, 62, p. 1351-1359.
69. Snee, R.D. (2006). Process variation – Enemy or opportunity. *Quality Progress*, December 2006 Edition, p. 73-75.
70. Sulek, J.M. (2004). Statistical quality control in services. *International Journal of Services Technology and Management*, 5, p. 522-531.
71. Sullivan, J.H., Stoumbos, Z.G., Mason, R.L., and Young, J.C. (2007). Step-Down Analysis for Changes in the Covariance Matrix and Other Parameters. *Journal of Quality Technology*, 39, p. 66-84.
72. Tang, P.F. and Barnett, N.S. (1996). Dispersion Control for Multivariate Processes. *Australian Journal of Statistics*, 38(3), p. 235-251.
73. Tracy, N. D., Young, J. C., & Mason, R. L. (1992). Multivariate control chart for individual observations. *Journal of Quality Technology*, 24, 88-95.
74. Wilcox, R. (2012). *Introduction to robust estimation and hypothesis testing*, 3rd Edition. Elsevier, Amsterdam.
75. Wilks, S. (1962). *Mathematical statistics*. John Wiley & Sons Inc., New York.
76. Wilks, S. S. (1963). Multivariate statistical outliers. *Sankhya A*, 25, 407-426.
77. Wood, M. (1994). Statistical methods for monitoring service process. *International Journal of Service Industry Management*, 5, p. 53-68.
78. Woodall, W.H. (2006). Use of Control Charts in Health Care Monitoring and Public Health Surveillance. *Journal of Quality Technology*, 38, p. 89-104.
79. Woodall, W.H., and Montgomery, D.C. (1999). Research Issues and Ideas in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, 31(4), p. 376-386.
80. Ye, N., Chen, Q. (2001). An anomaly detection technique based on a chi-square statistic for detecting intrusion into information system. *Quality and Reliability Engineering International*, 17, p.105-112.
81. Zolkeply, Z., Djauhari, M.A., and Salleh, R.M. (2017). SPC in Service Industry: Case in Teaching and Learning Process Variability Monitoring. DOI: 10.1063/1.5041700

INDEKS SUBYEK

A

- ADS, xiii, 93
- akar kuadrat dari variansi umum, 15
- alarm palsu, 1, 3, 19
- alarm talen, 3, 19
- arithmetic mean*, 12, 13, 16
- assignable cause*, 3
- Average absolute deviation*, 13

B

- batas kontrol, x, 1, 5, 6, 15, 19, 24, 65, 92, 97, 109, 172, 175, 187
- BIG (*Business, Industry & Government*), 3

C

- central limit theorem*, xiii, 14
- common cause*, 3
- Continuous Quality Improvement*, 1, 153
- control limits*, 6, 255
- covariance matrix*, xvi, 15
- critical to quality*, ix
- CTQ, ix, xi, xiii, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 32, 37, 50, 56, 89, 93, 94, 98, 99, 106, 109, 133, 154, 156, 157, 159, 165, 189

D

- daerah kontrol, 19, 24, 31, 35, 36, 42, 43, 49, 55, 68, 74, 81, 89, 94, 99, 102, 103, 110, 113, 114, 119, 122, 123, 131, 134, 135, 136, 143, 145, 146, 147, 158, 161, 162, 166, 168, 169
- data pencilan, 88
- data terpusat, 21, 22, 39, 90
- derajat kebebasan, 29, 31, 34, 36, 41, 53, 55, 72, 89, 92, 94, 95, 175, 176, 177, 178, 179, 232
- determinan, 7, 93, 94, 95, 98, 101, 103, 104, 107, 110, 113, 130, 132, 135, 137, 154, 155, 156, 158, 162, 172, 185, 186
- deviasi standar, 13, 17, 23, 28, 161, 168, 179

- diagram kontrol, ix, xi, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 19, 23, 24, 31, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 47, 48, 49, 53, 55, 61, 62, 65, 67, 68, 72, 74, 75, 80, 82, 85, 89, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 101, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 129, 131, 133, 134, 135, 136, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 150, 158, 160, 162, 163, 166, 167, 169, 170, 185, 189
- diagram kontrol T2, 31
- diagram kontrol *EP*, 4, 6, 7, 8, 158, 160, 162, 163, 185
- diagram kontrol *EPV*, 6, 7, 8, 166, 167, 169, 170, 185
- diagram kontrol *GV*, xi, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 97, 99, 101, 103, 105, 106, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 116, 121, 122, 125
- diagram kontrol *JGV*, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 122, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 134, 135, 136, 139, 145, 147
- diagram kontrol *JP*, xi, 5, 6, 7, 8, 17, 117, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 141, 143, 145, 147, 149, 150
- Distance standard deviation*, 13
- distribusi asimtotisnya, 4
- distribusi Beta, 36, 41, 86, 89, 92, 94, 95, 175, 176, 178, 229, 230, 232
- distribusi Chi-Squared, 53, 72, 175, 177, 178, 229, 233, 236
- distribusi *F*, 43, 46, 55, 60, 64, 80, 85, 178, 229, 236
- distribusi Normal, 86, 175, 179, 180, 229
- distribusi normal standar, 28, 29, 249
- distribusi probabilitas, 11

E

- effective variance*, xiii, 16, 252
- effective vector variance*, xiii, 16
- elipsoid bervolume minimum, 15

F

false alarm, 3, 19, 32, 35, 43, 49, 62, 68, 82, 94, 103, 114, 123, 136, 147, 162, 169
Formal Sciences, 29
fungsi tangga, 134

G

generalized variance, xiii, xv, 4, 15
geodesic distance, 12
geometric mean, 16
gradient, 229, 232, 236
grand mean, 54, 55, 57, 73, 74, 77
GP, xi, xiii, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18, 23, 97, 101, 102, 105, 106, 107, 108, 109, 112, 113, 115, 116, 125, 129, 132, 133, 137, 138, 154, 157, 159, 163, 185

H

HDS, xiii, 24, 37, 41, 42, 46, 55, 56, 61, 74, 81, 89, 92, 93, 102, 109, 112, 114, 121, 127, 134, 145, 156, 157, 161, 164, 168
himpunan data historis, 37
historical data set, xiii, 24, 37

I

in-control, xiii, 3, 19, 24, 102, 117
indeks kapabilitas proses, 14
Interquartile mean, 13
Interquartile range, 13
inversi matriks, 7, 172

J

Jaminan Kualitas, 176
jarak Euclides, 12
jarak geodesik, 12
jumlah kuintil, 12, 16, 33, 118, 119, 120, 122, 123, 126, 142, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 165, 169, 185, 186

K

Koefisien Variasi, 13
konstanta keandalan, 5
korelasi, 2, 18, 22, 23
kualitas, ix, x, 1, 2, 3, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 24, 32, 35, 44, 50, 53, 54, 62, 66, 68, 81, 82, 97, 106, 139, 140, 153, 154, 175, 181, 189, 211

kualitas proses, ix, 1, 2, 3, 8, 9, 11, 19, 23, 24, 32, 35, 44, 50, 62, 66, 68, 81, 82, 139, 140, 153, 154, 175, 181, 189
kualitas proses kompleks, ix, 8, 23, 181, 189
kuantil, 13, 14, 31, 34, 36, 41, 43, 46, 53, 55, 60, 64, 72, 80, 85, 89, 92, 94, 95, 175, 176, 177, 178, 179
kumpulan data, 8, 187
kurva dari PDF, 229

L

log-return, 56, 57, 63

M

matriks, x, 6, 7, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 36, 39, 43, 45, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 61, 63, 67, 68, 71, 73, 74, 75, 78, 79, 81, 83, 84, 89, 90, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 109, 110, 111, 113, 118, 119, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 143, 144, 146, 147, 149, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 168, 169, 172, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 223, 224, 226, 227
data, ix, x, xiii, xvi, 6, 9, 12, 13, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 78, 81, 82, 83, 84, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 102, 103, 104, 105, 109, 110, 111, 113, 114, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 127, 129, 130, 131, 133, 135, 136, 137, 139, 141, 142, 143, 146, 147, 149, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 252, 255
identitas, 21, 32, 33
inversi, 7, 21, 31, 33, 36, 39, 43, 45, 50, 55, 58, 68, 74, 78, 89, 90, 172, 181, 183
kovariansi, 15, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 36, 37, 39, 50, 55, 58, 74, 78, 89, 90, 93, 98, 99, 100, 102, 104, 105, 106, 107, 110, 111, 113, 118, 119, 120, 122, 124, 125, 129, 130, 131, 132, 134, 135, 137, 141, 142, 143, 154, 155, 158, 159, 160, 163, 165, 166, 167, 169, 185, 223, 224, 226, 227
satuan, 21, 32, 156, 159
simetris, 15, 20, 21, 28, 106, 249
Mean absolute difference, 13
median, 12, 13, 14

absolute deviation, 13
Müllinge, 13
Multirange, 13
 Mode, 12
 MPT, xiii, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 17, 19, 88, 131, 181, 189
 MPV, xiii, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 88, 89, 97, 115, 116, 117, 129, 131, 141, 156, 159, 161, 168, 181, 189
multivariate, x, xvi, xviii, 12, 20, 28, 252, 253, 254, 255
 process target, xvi
 process variability, xvi, xviii, 252, 253
 statistical process control, ix, x, 12, 255, 256

N

nilai eigen, 16
non-random effect, 3
 normal multivariat, 14, 32, 50, 68

O

observasi individual, xi, 1, 2, 8, 17, 29, 30, 48, 88, 229
 operasi matriks, 172
out-of-control, xiii, 3, 32, 44, 96

P

parameter, x, 1, 2, 6, 11, 13, 20, 24, 30, 35, 43, 48, 54, 61, 66, 73, 75, 93, 157, 164
 parameter dispersi, 2, 11
 parameter lokasi, 11
 penaksiran parameter, 35
 penjumlahan dua matriks, 7
 perkalian antar matriks, 7
 PFA, xiv, xvi, 1, 5, 26, 31, 41, 46, 60, 64, 72, 80, 85, 86, 92, 95, 99, 110, 157, 158, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 175, 176, 177, 178
probability density function, xiv, 28, 229
probability of false alarm, xiv
 proses kompleks, ix, x, xi, 1, 2, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 17, 26, 187, 189

Q

Q-STEM, xii, xv, 1, 2, 11, 175, 190
Quality Engineering, xii, xv, 1, 2, 175, 190, 253
Quality Management, xii, xv, 1, 2, 54, 175, 190, 253
Quality Science, xii, xv, 1, 2, 97, 175, 190, 256

Quality Technology, xii, xv, 1, 2, 97, 175, 190, 255, 256, 257
Quartile coefficient of dispersion, 13

R

random effect, 3
Range, 13
 rata-rata berbobot, 74, 77, 78, 130, 131, 132, 134, 142, 143, 144, 146
 rata-rata total, 54, 55, 57, 73, 74, 77, 84
reliability constant, 5
robust statistics, 5, 16

S

sains natural, xi, 3, 66, 155, 156, 159, 164, 171
 sains sosial, xi, xix, 66, 155, 156, 159, 189
 sampel, 2, 3, 5, 6, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 46, 48, 49, 54, 55, 58, 62, 66, 67, 73, 74, 81, 88, 89, 90, 91, 92, 98, 106, 109, 110, 114, 118, 119, 129, 130, 134, 141, 142, 157, 165
 sampel acak, 6, 14, 19, 20, 21, 28, 29, 88
sample size, 2, 255
 sampling, xi, 2, 3, 4, 6, 8, 17, 23, 29, 30, 41, 47, 48, 66, 67, 97, 129, 153, 156, 157, 189
scatter diagram, 22
short run production, xii, 157
 sistem MS Excel, 175, 177, 179, 180, 182
 skenario sampling kedua, 6, 17, 23, 41, 47, 97
 skenario sampling keempat, 3, 6, 17, 153, 156
 skenario sampling ketiga, 3, 4, 6, 8, 17, 23, 66, 129
 skenario sampling pertama, 3, 4, 6, 17, 48
start-up stage, 24
 statistik, vii, ix, x, xi, xii, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 41, 46, 48, 51, 55, 59, 63, 66, 74, 75, 79, 80, 84, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 99, 110, 116, 117, 119, 131, 141, 143, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 161, 164, 166, 168, 172, 175, 176, 177, 178, 180, 181, 185, 187, 229
 statistik T2 Hotelling, 4
 statistik EV, 153, 154, 155, 156, 157, 164
 statistik EPV, 7, 154, 164
 statistik GP, 17, 185
 statistik pengontrol, x, 19, 23, 24, 30, 48, 66, 97, 116, 117, 164, 166, 172
 statistik pengujian, 19
 statistik tangguh, 5, 16
 statistik FP, vii, 17, 117, 141, 185
 statistik W, 17, 88, 93, 95
student's t, xvi, 28, 29

sub-grup, xi, xvi, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 17, 24, 29, 30, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 106, 107, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 125, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 229

sub-grup berukuran konstan, 1, 8, 17, 29, 66, 67, 116, 134, 229

sub-grup berukuran tak konstan, 1, 2, 8, 17, 30, 66, 75, 129, 134, 141, 229

T

tabel statistik, 7, 175, 176

Tabel Statistik Distribusi Beta, 229

Tabel Statistik Distribusi Chi-Squared, 232

Tabel Statistik Distribusi F, 236

Tabel Statistik Distribusi Normal Standar, 249

target proses, x, xi, 1, 2, 6, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 24, 26, 28, 29, 30, 48, 49, 53, 229

Target proses kompleks, 12

total variance, xv, 15

transpose, xvi, 7, 21, 172, 181, 183

trimmed mean, 12

true alarm, 3, 19, 32, 35, 43, 49, 62, 68, 82, 94, 103, 114, 123, 136, 147, 162, 169

Truncated mean, 12

U

UCL, xv, 31, 32, 34, 35, 36, 40, 41, 43, 46, 47, 49, 52, 53, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 80, 82, 84, 85, 89, 91, 92, 99, 101, 102, 103,

105, 107, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 143, 144, 145, 147, 148, 149, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 169, 170, 175, 176, 177, 178

ukuran Luceno, 13

ukuran MPV, 4, 7

ukuran sampel, 14

ukuran sub-grup, 2, 7, 56, 66, 129, 141

V

variabilitas, ix, x, xi, 1, 2, 4, 6, 11, 13, 14, 16, 17, 24, 88, 89, 109, 112, 115, 116, 117, 119, 121, 125, 127, 136, 145, 147, 150, 153, 154, 155, 156, 164, 229

variabilitas proses, ix, x, xi, 1, 2, 6, 11, 13, 14, 17, 24, 88, 89, 109, 112, 115, 116, 119, 121, 125, 127, 136, 145, 150, 153, 155, 156, 164, 229

variabilitas proses kompleks, xi, 1, 2

variansi, 5, 13, 15, 16, 17, 20, 23, 97, 157, 158, 164, 165, 166

variansi efektif, 4, 16

variansi umum relatif, 15

variansi vektor, 5, 15, 16

vector variance, xv, 5, 15, 117, 118, 252

vektor *mean*, 2, 14, 17, 20, 21, 24, 32, 50, 51

vektor *mean* populasi, 2, 24, 51

vektor rata-rata, 36, 38, 49, 50, 54, 57, 62, 63, 67, 69, 73, 74, 76, 77, 81, 83, 84, 88, 89, 93, 98, 99, 103, 109, 113, 118, 122, 130, 135, 136, 137, 146, 157, 162, 165, 168

W

Winsorized mean, 13

BEBERAPA TESTIMONI

1. Testimoni dari Statistisi/Matematisi Internasional

1.1. Professeur Yves Escoufier, Statisticien, (The father of Data Science)

Président honoraire de l'Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc.



J'ai eu le plaisir et la responsabilité d'accueillir Maman Djauhari comme étudiant il y a près de cinquante ans. Sa venue s'inscrivait dans le cadre d'une coopération entre l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc à Montpellier et l'Institut Technologique de Bandung.

Il arrivait avec de bonnes connaissances en mathématiques et venait se

former à la Statistique. Le laboratoire qui l'accueillait, comme beaucoup d'autres en France à cette époque, se préoccupait de l'usage intensif des ordinateurs dans l'analyse des grands ensembles de données. Maman Djauhari fut un étudiant sérieux, créatif, qui réussit sans difficulté. La thèse qu'il soutint en juin 1979 a pour titre: Problèmes algorithmiques en analyse factorielle des données.

Retourné chez lui, il m'a régulièrement tenu au courant de ses travaux et de l'évolution de sa carrière d'enseignant-chercheur. Il a assuré de nombreuses responsabilités universitaires et a publié de nombreux articles et ouvrages dans le domaine de la statistique du contrôle pour des processus à plusieurs variables. De tels acquis me laissent penser que ce nouveau livre sera particulièrement utile pour ceux qui mettent la qualité en première priorité dans leur profession et leur travail.

C'est une grande joie et un grand honneur pour moi d'être invité par Maman Djauhari à témoigner de la permanence du lien de sympathie qu'il a entretenu avec moi. Qu'il en soit remercié.

Professeur Yves Escoufier

Président honoraire de l'Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc.

Terjemahan dalam Bahasa Indonesia:

Saya merasa senang dan bertanggung jawab menyambut Maman Djauhari sebagai mahasiswa hampir lima puluh tahun yang lalu. Kunjungannya merupakan bagian dari kerjasama antara Université des Sciences et Techniques du Languedoc di Montpellier, Prancis, dan Institut Teknologi Bandung, Indonesia.

Dia tiba dengan pengetahuan matematika yang baik dan datang untuk memperdalam Statistik. Laboratorium yang menampungnya, seperti banyak laboratorium lain di Prancis pada waktu itu, berkaitan dengan penggunaan komputer secara intensif dalam analisis data berukuran besar (*Big Data* menurut istilah sekarang – Penulis). Maman Djauhari adalah mahasiswa yang serius dan kreatif yang berhasil tanpa kesulitan. Tesis Doktor yang dipertahankannya pada bulan Juni 1979 berjudul: *Problèmes algorithmiques en analyse factorielle des données* (Masalah Algoritma dalam Analisis Faktorial Data).

Kembali ke Indonesia, dia terus memberi saya informasi tentang pekerjaannya dan kemajuan karirnya sebagai Dosen-Peneliti. Dia telah memegang banyak tanggung jawab akademis dan telah menerbitkan banyak artikel dan buku di bidang kontrol kualitas proses multivariat. Pencapaian seperti itu membuat saya percaya bahwa buku barunya ini akan sangat berguna bagi mereka yang mengutamakan kualitas dalam profesi dan pekerjaan mereka.

Merupakan suatu kegembiraan yang tak terhingga dan suatu kehormatan yang tinggi bagi saya menerima undangan dari Maman Djauhari untuk memberikan testimoni tentang keabadian ikatan simpati yang dia pertahankan dengan saya. Untuk itu, saya berterimakasih kepada dia.

Professeur Yves Escoufier, Statistisi peringkat atas di Prancis (Bapak Data Science)
Presiden Kehormatan Universitas Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc



TESTIMONY

Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques with their application in various professions and businesses

Authors: Maman A. Djauhari and Dyah E. Herwindiati

This is a book on Multivariate Statistical Process Control (MVSPC) written in the national language to reach most people in the country. In MVSPC several correlated variables are considered simultaneously. The book focusses on two types of control: Control of process target and control of process variability. This distinction in the controls is murky in many books and papers on Quality Control.

The book is arranged in 5 parts with each part containing several chapters. After describing what they mean by complex processes, it discusses the usual scenarios of monitoring individual observations and then monitoring subgroups of constant size. The novelty in the book is the discussion of controls with monitoring of unequal subgroup sizes. Such situations are common in service-industries, educational institutions, and government sectors. A fourth context is when the CTQs may be different in sequential sampling. The authors take much care in addressing these real issues for the two types of control. Many examples from manufacturing are considered. Also examples from service industries (quality of teaching, learning processes in schools) and stock markets are included. Open-source computer software like MS Excel is used in the examples to demonstrate the ease with which the procedures can be implemented.

My comments are based on the Table of Contents and the Introduction supplied in English by the authors. The breadth and depth of the coverage displays the experience of the authors in teaching and consulting. The book can be used by teachers and practitioners of Quality Control in Indonesia. It is a useful addition to the library of anybody working in Quality Control. I congratulate the authors for undertaking this important work for their country and people.

Bovas Abraham, Professor Emeritus

Former President of Statistical Society of Canada

Founding President of the International Society for Business and Industrial Statistics (ISBIS),
International Statistical Institute

Business and Industrial Statistics Research Group, University of Waterloo, Canada



TESTIMONY

It is an immense pleasure, indeed a rare honour, to write this testimony on the recent book written by Professor Maman Djauhari on “Quality Control of Complex Process: State-of-the-art Statistical Techniques with their application in various professions and businesses”.

I congratulate Professor Maman Djauhari for writing this incredibly useful book to help professionals who are engaged in various hands-on quality control tasks in addition to guiding researchers and students to have a solid knowledge of analysing various complex processes using relevant statistical techniques.

In addition to his highly creative and deeper original thinking quality, the ability of Professor Djauhari to simplify complex ideas and methods and present them to the audience nicely is amazing. He is also an excellent organiser and living inspiration for many young academics and researchers in Indonesia, Malaysia and beyond.

Human being is the most complex creation of Allah. Undoubtedly the body and chemical structures of human are complex, their thought processes are more complex. The complexities of life are almost everywhere. Often real-life complexities are explained by various models and processes, starting from the learning and education processes to the production and service processes. Statistical methods and models are keys to understand the characteristics of complex processes and reveal the hidden ‘jewels’ to benefit people.

Many statistical quality control methods are already in place to improve the industrial production processes with a view to ensuring quality of the products. In fact, the introduction to statistical process control and total quality control have dramatically changed the industrial world leading to increased quality of products and profit.

The existing practices of controlling complex processes deal with samples of individuals or constant-size subgroups of observations. This book introduces analyses of complex processes for additional sampling schemes of non-constant size and critical to quality size.

In addition to covering traditional manufacturing processes using statistical process control methods, this book develops techniques to deal with various complex service processes in social and health sciences including education and health services.

Professor Djauhari has included plenty of real-life examples from various disciplines to illustrate the usefulness of the methods using easy and free computing software MS Excel. The author has kept in mind the diversity of the users and readers of the book from various disciplines and hence made it easily readable and immensely user-friendly. The book also comes with ready to use algorithms to complement solid basic knowledge of the discipline.

Given the diversity of examples of complex processes in the book from various disciplines, this book will be beneficial to professionals in social and medical sciences beyond the traditional quality control professionals in science, technology, engineering, and management.

I wish a very wide readership of the book, and long life of the author with good health and happiness to serve the humanity with his profound knowledge and vast experience.

Professor Dr Shahjahan Khan, Statistisi internasional di Australia & Bangladesh
Vice Chancellor, Asian University of Bangladesh, Ashulia, Dhaka – 1341, Bangladesh
Expatriate Fellow, Bangladesh Academy of Sciences
Fellow, Royal Statistical Society, UK
Founding Chief Editor, Journal of Applied Probability and Statistics (JAPS), USA
Adjunct Professor, University of Southern Queensland, Australia
Cultural Diversity Ambassador, Queensland, Australia
Member, Institute of Mathematical Statistics, USA
Elected Member, International Statistical Institute, Netherlands

1.4 Professor Emeritus Dato' Dr Hj Kamel Ariffin Mohd Atan, Matematisi internasional di Malaysia,

Presiden, Akademi Ilmuwan Sains Matematik Malaysia.



TESTIMONI KEPADA BUKU

"Kawalan Kualiti Proses Kompleks: Teknik Statistik Terkini dan Aplikasinya dalam Pelbagai Profesion dan Perniagaan"

Seperti yang sedia dimaklumi usaha memastikan kelancaran sesuatu proses yang menggerakkan aktiviti penghidupan merupakan suatu yang lumrah dan seharusnya dilaksanakan dengan cekap dan terancang rapi.

Bidang ilmu statistik merupakan antara alat yang memainkan peranan penting dalam usaha ini terutama dalam menangani proses yang semakin kompleks dan canggih. Untuk tujuan ini kaedah yang diamalkan seharusnya dipertingkatkan kemampuannya dari semasa ke semasa mengikut perkembangan kewujudan proses harian yang semakin kompleks pada hari ini dan akan datang. Ini terutamanya dalam pelbagai profesion yang menjadi tulang belakang aktiviti yang menggerakkan ekonomi sesebuah negara.

Buku ini yang telah dihasilkan oleh pengarangnya sangat bertepatan dengan hasrat ini. Beliau telah memperluaskan dan memperbaiki lagi kaedah tradisi yang menjadi amalan pengamal-pengamal terdahulu.

Saya percaya buku ini berjaya dalam mengutarakan suatu kaedah yang lebih cekap dan sangat membantu dalam usaha mengawal proses-proses kompleks jentera yang menggerakkan aktiviti penghidupan dan seharusnya menjadi rujukan utama para pengamal dalam bidang ini.

Professor Emeritus Dato' Dr Hj Kamel Ariffin Mohd Atan
Presiden
Akademi Ilmuwan Sains Matematik Malaysia.

2. Testimoni Para Pakar Nasional

2.1. Profesor Emeritus Dr. M. Ansjar, Matematis Terapan di Indonesia

Institut Teknologi Bandung



TESTIMONI

Buku “Kontrol Kualitas Proses Kompleks: Teknik statistik mutakhir disertai aplikasinya dalam berbagai profesi dan bisnis”

Penulis: Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindiati

Berbagai tulisan Prof. Maman A Djauhari telah menunjukkan manfaatnya menunjang berbagai bidang profesi. Karena manfaatnya itu, di antara tulisannya banyak pula yang telah diterjemahkan kedalam berbagai bahasa asing.

Berdasarkan fakta tersebut, buku ini menunjukan bahwa penerapan ilmu statistik khususnya dalam mengontrol kualitas suatu proses dapat dimanfaatkan oleh semua kalangan. Diyakini bahwa buku ini juga akan memberikan kontribusi positif dan manfaat yang tinggi untuk berbagai bidang profesi.

Prof. Emeritus Dr. M. Ansjar

Matematis Terapan, Institut Teknologi Bandung

2.2. Prof. Dr. Ing. Herman Sasongko

Rektor Universitas Internasional Semen Indonesia (UISI)



TESTIMONI

Buku “Kontrol Kualitas Proses Kompleks: Teknik statistik mutakhir disertai aplikasinya dalam berbagai profesi dan bisnis”

Penulis: Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindiati

Peran Statistik dalam pemodelan perilaku sistem-mikro yang tidak dapat diselesaikan secara analitis sudah lama dikenal. Umpamanya dalam turbulence modelling di bidang fluid mechanics. Begitu pula dalam statistical thermodynamics. Dalam bidang bisnis pun, pengembangan *Complex Process Quality Control* merupakan suatu keniscayaan takala

hendak memberikan deskripsi tentang perilaku sistem. Dengan demikian, buku ini pastilah sangat diperlukan oleh para pengguna teknik statistik di berbagai bidang profesi dan bisnis.

Prof. Dr. Ing. Herman Sasongko
Rektor Universitas Internasional Semen Indonesia (UISI)

2.3. Prof. Dr. Ir. Agustinus Purna Irawan, M.T., M.M., IPU, ASEAN Eng.
Rektor Universitas Tarumanagara



TESTIMONI

Buku “Kontrol Kualitas Proses Kompleks: Teknik statistikal mutakhir disertai aplikasinya dalam berbagai profesi dan bisnis”

Penulis: Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindati

Revolusi Industri 4.0 di bidang manufaktur mengekspresikan transformasi digital industri menggunakan teknologi baru. Pemanfaatan transformasi digital tersebut tidak serta merta menghasilkan kualitas produk yang tinggi untuk memenuhi harapan pelanggan. Statistik Proses Kontrol mempunyai peran yang sangat penting dalam transformasi menuju digitalisasi di dunia industri. Hal ini tercermin dalam buku yang ditulis oleh para pakar, dimana salah satu penulisnya adalah Profesor dari Universitas Tarumanagara.

Buku ini banyak membahas variabilitas proses dari Statistics Process Control dengan variabel multi dimensi. Pada multivariate statistical process control ada dua hal yang harus diperhatikan yaitu pengontrolan variabilitas dan pengontrolan target proses. Seperti yang telah diketahui, metode Statistik untuk ‘pengontrolan target proses’ pada industri manufaktur sudah banyak dibahas, namun metode Statistik untuk ‘pengontrolan variabilitas proses’ belum banyak ditemukan.

Kami berharap penerbitan buku ini bermanfaat tidak hanya untuk professional Quality Technology dan Quality Management, tetapi juga untuk mahasiswa yang sedang mempersiapkan diri menyelesaikan studi dan memasuki dunia kerja. Secara khusus buku ini juga dapat mendukung Program Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM) yang menjadi salah satu program unggulan dari Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi, dimana secara intensif memberikan dukungan pada kegiatan Magang Industri

dengan tujuan memberikan wawasan dan pengalaman praktis kepada mahasiswa mengenai kegiatan riil di dunia industri.

Semoga buku ini dapat menjadi salah satu referensi dalam melakukan diagnosis real problems pada bidang industri manufaktur dan bisnis, sejalan dengan Program MBKM.

Prof. Dr. Ir. Agustinus Purna Irawan, M.T., M.M., IPU, ASEAN Eng.
Rektor Universitas Tarumanagara

2.4. Prof. Dr. Adiwijaya
Rektor Universitas Telkom



TESTIMONI

Buku "Kontrol Kualitas Proses Kompleks: Teknik statistik mutakhir disertai aplikasinya dalam berbagai profesi dan bisnis"

Penulis: Maman A. Djauhari dan Dyah E. Herwindati

Big Data dalam era digital ini merupakan suatu keniscayaan, dimana data dalam jumlah yang sangat besar (volume), beragam (variety), dan sangat cepat (velocity) perubahannya. Karenanya, terkadang komputer dan perangkat lunak konvensional tidak mampu untuk mengolah data tersebut.

Proses pemantauan industri manufaktur dan proses bisnis lainnya pada kasus data besar (big data) tidak terlepas dari pemantauan terhadap proses sekuensial yang sangat kompleks dan beragam yang berasal dari berbagai sumber. Pemantauan ini diharapkan memberikan kestabilan proses. Statistical Process Control (SPC) memiliki peranan yang penting dalam proses pemantauan proses agar terjadi peningkatan kualitas, produktivitas, dan efisiensi biaya sehingga berdampak pada perbaikan performansi finansial dalam suatu proses bisnis.

Buku ini disusun oleh dosen dan kolega saya pada saat saya menempuh pendidikan di Institut Teknologi Bandung. Dedikasi dosen saya pada kemajuan keilmuan statistika tidak diragukan lagi, karena kontribusi positifnya tak hanya pada level nasional bahkan dunia. Demikian juga kolega saya senantiasa mendedikasikan ilmunya dalam kebermanfaatan dan mencerdaskan kehidupan bangsa.

Saya yakin buku ini akan memberikan manfaat yang besar tak hanya untuk para akademisi dan mahasiswa, tetapi juga bagi para pelaku bisnis, industri, dan profesional yang berhadapan langsung dengan quality management.

Prof. Dr. Adiwijaya

Rektor Universitas Telkom

TENTANG PARA PENULIS

1. Maman Abdurachman Djauhari



Maman A. Djauhari dilahirkan di Tanah Pasundan, Dayeuh Garut, Indonesia, pada 8 Desember 1948. Dia meraih Doctorandus (Kurikulum 11 semester) dalam bidang Matematika dari Institut Teknologi Bandung (ITB), Indonesia, tahun 1974. Lalu, Diplôme d'Études Approfondies dan Doctorat du 3^{ème} Cycle, dua-duanya dalam Pure and Applied Mathematics, diraihnya dari Université de Montpellier 2, Perancis, berturut-turut tahun 1977 and 1979.

Karirnya sebagai Pengelola Akademik dimulai tahun 1983 tatkala dilantik sebagai Sekertaris Jurusan Matematika ITB. Setelah itu, selama 25 tahun tanpa jeda, dia selalu terlibat dalam manajemen ITB. Posisi terakhirnya di ITB sebelum pensiun dini pada tahun 2009 adalah Ketua Majelis Guru Besar.

Peringkat kegurubesaran tertinggi (Pembina Utama, IV/e) dianugerahkan kepada Penulis oleh Presiden Republik Indonesia tahun 2007 (dua tahun sebelum pensiun dini) atas pencapaian saintifik dan akademik. Tahun 2012, ITB menganugerahkan *Ganesa Wira Aditama*; penghargaan sebagai Skolar Berperingkat Tertinggi (*Highest Rank Scholar*). Tahun 2014 Penulis dilantik oleh Universiti Putra Malaysia sebagai Profesor Berperingkat Tertinggi (*A Grade*) dengan Golongan UDQ05. Sebelumnya, dari 2012-2014 Penulis adalah Penasihat Akademik Faculty of Mathematics and Computer Science, Universiti Teknologi Mara, Shah Alam, Malaysia. Pada periode yang sama, dia juga adalah Penasihat Akademik Faculty of Science, Technology and Human Development, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia.

Dalam kehidupan profesionalnya, Penulis telah menerima berbagai penghargaan (*Awards*) dan pengakuan internasional, termasuk;

1. Konsultan pada *The World Bank*, tahun 2009.
2. Gold Medal Award for outstanding contribution in statistics dianugerahkan oleh the Islamic Countries Society of Statistical Sciences (ISOSS), 2005.
3. Gold Medal Award bidang Statistika (berdua dengan Dr. Norhaidah Mohd Asrah, UTHM), berkat artikel "Effective Vector Variance in PLUS Highway Management", dianugerahkan pada International Research & Innovation Symposium and Exposition 2021 (RISE 2021), di UTHM.

4. Silver Medal Award bidang ICT (bertiga dengan Dr. Norhaidah Mohd Asrah dan Dr. Rohayu Mohd Salleh, UTHM), berkat penerapan "Effective Vector Variance in PLUS Highway Management", dianugerahkan pada International Competition Award 2022, diselenggarakan oleh Malaysia Technology Exposition.
5. Excellent Service Award, Faculty of Science, Universiti Teknologi Malaysia, 2013.
6. Excellent Consultation Award, Universiti Teknologi Malaysia, 2011.
7. Pengakuan dari UNESCO-AEGIS (Australian Experts Group in Industrial Study) sebagai aktivis dalam Scientific Knowledge Production di wilayah Asia-Pasifik, 2006.
8. Pengakuan dari Associate Editor of Journal "BioPharm: The Applied Technology of Biopharmaceutical Development", Milwaukee, USA, sebagai konsultan bidang analisis statistik, 2001.
9. Dosen Terbaik pilihan mahasiswa, Jurusan Matematika, ITB, 2000.

Di samping itu, sebagai Pegawai Negeri Sipil, Penulis menerima penghargaan *Satya Lencana Karya Satya XXX* dari Presiden Republik Indonesia pada 2005.

Adapun bidang riset yang digeluti Penulis termasuk (diurut secara alfabetik) *complex network analysis, complex systems, econophysics, financial market analysis, mathematical statistics, multivariate analysis, statistical process control*. Penulis dapat dihubungi melalui alamat email berikut: maman_djauhari@iteba.ac.id atau maman_djauhari@yahoo.com.

2. Dyah Erny Herwindiati



Dyah Erny Herwindiati, Guru Besar aktif di Universitas Tarumanagara, Jakarta. Dia menyelesaikan studi S3 dari Institut Teknologi Bandung pada tahun 2006 dengan disertasi berjudul *A New Criterion in Robust Estimation for Location and Covariance Matrix and Its Application for Outlier Labeling*.

Beberapa kegiatan keilmuan yang dilakukannya di Mancanegara dalam kurun 2011-2014, antara lain adalah:

1. Sebagai *External Co-Supervisor - Mathematics Doctor of philosophy* – Faculty of Science, Universiti Teknologi Malaysia, dan
2. Sebagai *Visiting Researcher, Department of Mathematical Engineering - Conservatoire National des Arts et Metiers (CNAM), Paris - France*.

Sejak tahun 2014 hingga saat ini dia menduduki jabatan Dekan Fakultas Teknologi Informasi di Universitas Tarumanagara, Jakarta. Topik penelitian dan publikasi yang ditekuninya adalah *Remote Sensing, Machine Learning, Data Mining, dan Data Science*.

Dia dapat dihubungi di: dyahh@fti.untar.ac.id.



Kontrol Kualitas Proses Kompleks

**Teknik Statistikal Mutakhir
Disertai Penerapannya di Berbagai Profesi
dan Bisnis**

Quality Control of Complex Processes: State-of-the-art statistical techniques with their application in various professions and businesses

Buku ini adalah literatur khusus yang fokus pada MVSPC dan lebih khusus lagi pada pengontrolan variabilitas proses kompleks. Mengapa variabilitas dikhususkan? Ada dua alasan utama.

Pertama, variabilitas sulit dipahami dan karenanya sulit diukur; artinya, sulit dikelola. Di lain pihak (ini penting dicatat), variabilitas proses dan/atau produk lebih mudah dirasakan ketimbang parameter lainnya seperti rata-rata (*mean*). Itulah sebabnya mengapa variabilitas sangat istimewa dalam literatur statistika (General Electric (1998) dan Snee (2006)). Bahwa variabilitas sulit untuk dikelola tetapi penting dijelaskan oleh Lara Boyd, seorang peneliti otak di University of British Columbia, Vancouver, Kanada. Dalam *TEDx Talks*, yang diterbitkan pada 15 Desember 2015, Boyd berkata: "Sebagai seorang peneliti, variabilitas telah membuatku gila. Variabilitas membuat sulit penggunaan statistik untuk menguji data dan ide Anda. Oleh karena itu, studi intervensi medis secara khusus dirancang untuk meminimalkan variabilitas." Lebih lanjut, dia menambahkan, "Dalam penelitian saya, jelas sekali bahwa data yang paling informatif yang kami kumpulkan, menunjukkan variabilitas tersebut."

Kedua, seperti yang dikatakan Hoerl dan Snee (2012), memahami variabilitas harus menjadi kompetensi inti para ahli statistik dan semua profesional bidang kualitas. Mereka harus berpikir secara mendalam tentang variabilitas disertai pengaruhnya.



**ITB
Press**

Gedung Perpustakaan Pusat ITB
Lantai Basement, Jl. Ganesa No. 10
Bandung 40132, Jawa Barat
Telp. 022 2504257/022 2534155
e-mail: office@itbpress.itb.ac.id
web: www.itbpress.itb.ac.id
Anggota Ikapi No. 043/JBA/92
APPTI No. 005.062.1.10.2018

