

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	ii
KATA PENGANTAR	iii
<i>ABSTRAK</i>	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Identifikasi Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Rumusan Masalah.....	4
1.5 Tujuan Penelitian	4
BAB 2 DASAR TEORI PELAT LENTUR	5
2.1 Teori Elastisitas	5
2.1.1 Tegangan Saat Benda Dalam Kondisi Elastis.....	6
2.1.2 Regangan dan Perpindahan.....	12
2.1.3 Hukum Hooke Umum.....	14
2.2 Pelat.....	16
2.2.1 Tinjauan Umum Pelat	16
2.2.2 Fungsi Pelat Lantai	16
2.2.3 Jenis-Jenis Pelat Berdasarkan Materialnya.....	16
2.2.4 Jenis-Jenis Pelat Berdasarkan Strukturnya	17
2.2.5 Sistem Pelat Satu Arah / <i>One Way Slab</i>	18

2.2.6 Sistem Pelat Dua Arah / <i>Two Way Slab</i>	21
2.2.7 Perencanaan Tebal Minimum Pelat Dua Arah	23
2.2.8 Metode Analisis Struktur Pelat.....	24
2.2.9 Jenis – Jenis Tumpuan	26
2.2.10 Peraturan dalam desain pelat dengan bukaan	28
2.3 Kantilever.....	30
2.4 Beton Bertulang	30
2.4.1 Tinjauan Umum Beton Bertulang.....	30
2.4.2 Bahan Beton.....	31
BAB 3 METODE ELEMEN HINGGA	34
3.1 Pendahuluan	34
3.2 Teori Umum Metode Elemen Hingga.....	34
3.2.1 Elemen Linear Hexahedral	37
3.3 Prosedur Analisis	40
3.4 Studi Literatur	41
3.5 Data Studi Eksperimental.....	42
3.6 Pemodelan.....	42
3.7 Jenis Material dan Properti.....	42
3.8 <i>Meshing</i>	42
3.9 Beban dan Perletakkan.....	43
3.10 Data Studi Numerik.....	43
3.11 Perbandingan Data	43
3.12 Kesimpulan dan Saran.....	44
BAB 4 STUDI KASUS.....	45
4.1 Pemodelan Pelat Kantilever	45

4.1.1	Ukuran Pelat Kantilever.....	46
4.1.2	Ukuran Balok Penumpu.....	46
4.2	Pemodelan Bukaan.....	46
4.3	Pemodelan Tulangan Baja.....	47
4.4	Properti Material	48
4.5	Pemodelan Perletakan	49
4.6	Pembebatan	49
4.7	Material Model di MIDAS FEA	50
4.8	Meshing.....	55
4.9	Validasi	57
4.10	Hasil dan Pembahasan.....	61
4.10.1	<i>Crack</i> Pertama	61
4.10.2	Beban Maksimum.....	66
4.10.3	Lendutan	67
4.10.4	Tegangan.....	69
	BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	78
5.1	Kesimpulan	78
5.2	Saran.....	78
	DAFTAR PUSTAKA	79

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Studi eksperimental pelat kantilever dengan bukaan	1
Gambar 1.2 Studi eksperimental pelat kantilever dengan bukaan	3
Gambar 2.1 Respon suatu benda elastis terhadap gaya luar	6
Gambar 2.2 Metode Irisan.....	7
Gambar 2.3 Elemen tiga dimensi.....	8
Gambar 2.4 Rotasi elemen dua dimensi.....	9
Gambar 2.5 Lingkaran Mohr untuk tegangan.....	11
Gambar 2.6 Komponen momen di bidang miring elemen pelat.....	11
Gambar 2.7 Deformasi suatu elemen	13
Gambar 2.8 Distorsi yang diproyeksikan.....	14
Gambar 2.9 Pelat satu arah dan pelat dua arah	19
Gambar 2.10 Penulangan pelat kantilever satu arah	20
Gambar 2.11 Penulangan pelat satu arah dua tumpuan	20
Gambar 2.12 Tampak samping penulangan pelat dua arah	22
Gambar 2.13 Tampak atas penulangan pelat 2 arah	23
Gambar 2.14 Koefisien momen pelat PBI 1971	26
Gambar 2.15 Koefisien momen pelat PBI 1971	26
Gambar 2.16 Pelat tepi ditumpu bebas	27
Gambar 2.17 Pelat tepi terjepit penuh.....	27
Gambar 2.18 Pelat tepi terjepit sebagian.....	27
Gambar 2.19 Hubungan antara pelat dan balok anak	28
Gambar 2.20 Ukuran bukaan pada pelat 2 arah yang diijinkan	29
Gambar 3.1 Bagan perbandingan macam-macam metode perhitungan.....	35
Gambar 3.2 Gambar elemen linear hexahedral.....	38
Gambar 3.3 Diagram alir (<i>flow chart</i>).....	44
Gambar 4.1 Ilustrasi pemodelan 7 pelat kantilever.....	45
Gambar 4.2 Ukuran pelat kantilever dan balok penumpu.....	46
Gambar 4.3 Detail penulangan.....	47
Gambar 4.4 Pemodelan tulangan pada pelat tanpa bukaan di MIDAS FEA	48

Gambar 4.5 Pemodelan tulangan pada pelat dengan bukaan di MIDAS FEA	48
Gambar 4.6 Letak perletakan pada pelat kantilever.....	49
Gambar 4.7 Letak beban pada pelat kantilever.....	50
Gambar 4.8 Pembebanan dan perletakkan di MIDAS FEA	50
Gambar 4.9 Parameter untuk material beton.....	51
Gambar 4.10 Parameter dan grafik perilaku beton <i>brittle</i>	52
Gambar 4.11 Parameter dan grafik perilaku beton Thorenfeldt	53
Gambar 4.12 Parameter untuk tulangan baja	54
Gambar 4.13 Lendutan pada model ukuran elemen 50 mm	56
Gambar 4.14 Lendutan pada model ukuran elemen 25 mm	56
Gambar 4.15 Lendutan pada model ukuran elemen 10 mm	56
Gambar 4.16 <i>Meshing</i> dengan ukuran elemen 25 mm.....	57
Gambar 4.17 Lendutan pada model pelat tanpa bukaan tanpa balok penumpu....	57
Gambar 4.18 Struktur sederhana pelat tanpa bukaan tanpa balok penumpu	58
Gambar 4.19 <i>Crack</i> pertama pada kasus 1 di MIDAS FEA	62
Gambar 4.20 <i>Crack</i> pertama pada kasus 1 di studi eksperimental	62
Gambar 4.21 <i>Crack</i> pertama pada kasus 2 di MIDAS FEA	62
Gambar 4.22 <i>Crack</i> pertama pada kasus 2 di studi eksperimental	63
Gambar 4.23 <i>Crack</i> pertama pada kasus 4 di MIDAS FEA	63
Gambar 4.24 <i>Crack</i> pertama pada kasus 4 di studi eksperimental	63
Gambar 4.25 <i>Crack</i> pertama pada kasus 5 di MIDAS FEA	64
Gambar 4.26 <i>Crack</i> pertama pada kasus 5 di studi eksperimental	64
Gambar 4.27 <i>Crack</i> pertama pada kasus 6 di MIDAS FEA	64
Gambar 4.28 <i>Crack</i> pertama pada kasus 6 di studi eksperimental	65
Gambar 4.29 <i>Crack</i> pertama pada kasus 7 di MIDAS FEA	65
Gambar 4.30 <i>Crack</i> pertama pada kasus 7 di studi eksperimental	65
Gambar 4.31 Konsentrasi tegangan pada kasus 1 di MIDAS FEA	70
Gambar 4.32 Konsentrasi tegangan pada kasus 2 di MIDAS FEA	70
Gambar 4.33 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 2.....	70
Gambar 4.34 Konsentrasi tegangan pada kasus 3 di MIDAS FEA	71
Gambar 4.35 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 3.....	71

Gambar 4.36 Konsentrasi tegangan pada kasus 4 di MIDAS FEA	71
Gambar 4.37 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 4.....	72
Gambar 4.38 Konsentrasi tegangan pada kasus 5 di MIDAS FEA	72
Gambar 4.39 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 5.....	72
Gambar 4.40 Konsentrasi tegangan pada kasus 6 di MIDAS FEA	73
Gambar 4.41 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 6.....	73
Gambar 4.42 Konsentrasi tegangan pada kasus 7 di MIDAS FEA	73
Gambar 4.43 Diagram tegangan di daerah bukaan pada kasus 6.....	74
Gambar 4.44 Tegangan tulangan pada kasus 1 di MIDAS FEA	74
Gambar 4.45 Tegangan tulangan pada kasus 2 di MIDAS FEA	75
Gambar 4.46 Tegangan tulangan pada kasus 3 di MIDAS FEA	75
Gambar 4.47 Tegangan tulangan pada kasus 4 di MIDAS FEA	75
Gambar 4.48 Tegangan tulangan pada kasus 5 di MIDAS FEA	76
Gambar 4.49 Tegangan tulangan pada kasus 6 di MIDAS FEA	76
Gambar 4.50 Tegangan tulangan pada kasus 7 di MIDAS FEA	76

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 <i>Summary</i> 7 pelat kantilever yang diuji.....	49
Tabel 4.3 Tabel hasil proses diskritisasi	55
Tabel 4.4 Tabel perbandingan tulangan atas dan tulangan bawah.....	60
Tabel 4.5 Tabel hasil perbedaan <i>crack</i> pertama.....	61
Tabel 4.6 Tabel perbedaan hasil beban maksimum	66
Tabel 4.7 Tabel perbedaan hasil lendutan.....	67
Tabel 4.8 Tabel perbandingan nilai tegangan	69

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap bangunan pada umumnya memiliki jalur pipa, kabel internet, kabel telepon ataupun sistem pendingin yang dipasang di luar dinding sehingga harus melewati pelat lantai. Akibatnya pelat lantai tersebut haruslah dibuat bukaan agar dapat dilewati. Bukaan yang dibuat dapat bervariasi bentuknya seperti lingkaran ataupun persegi. Adanya bukaan pada struktur pelat beton bertulang dapat menimbulkan berbagai masalah seperti berkurangnya kekakuan pelat, defleksi yang berlebihan ataupun berkurangnya kekuatan kapasitas pelat. Selain itu, dengan adanya bukaan pada pelat beton bertulang dapat mengakibatkan retakan yang berpusat pada bukaan tersebut.

Pembuatan pelat beton bertulang dengan bukaan pada umumnya hampir sama seperti pembuatan beton bertulang pada umumnya. Pada awalnya dilakukan pemasangan tulangan-tulangan dengan syarat ketika tulangan akan melewati daerah bukaan, tulangan akan ditekuk sehingga daerah bukaan kosong. Selain itu biasanya di daerah sekeliling bukaan akan memiliki tulangan-tulangan dengan jarak yang lebih sempit. Setelah itu dilakukan pemasangan cetakan dan pengecoran beton. Dibawah ini merupakan salah satu contoh pelat beton bertulang dengan bukaan yang digunakan dalam studi eksperimental.



Gambar 1.1 Studi eksperimental pelat kantilever dengan bukaan
(Sumber Khalil et al., 2019)

Meskipun studi eksperimental sering digunakan dalam penelitian, studi eksperimental juga memiliki kekurangan. Studi eksperimental cenderung memakan biaya dan waktu lebih. Karena itu studi eksperimental harus dilakukan dengan teliti dan benar dari awal hingga akhir. Hal ini agar tidak dilakukan eksperimen berulang sehingga memakan waktu lebih. Selain itu studi eksperimental juga beresiko mengalami ketidaktepatan pada objek eksperimen karena faktor kesalahan manusia.

Untuk mengatasi kekurangan dari studi eksperimental, dapat digunakan studi numerik dengan metode elemen hingga. Metode elemen hingga atau *Finite Element Method (FEM)* sering kali digunakan sebagai metode terakhir dalam menghitung suatu objek dengan bentuk yang tidak biasa. Metode ini digunakan pada masalah-masalah rekayasa dimana solusi eksak atau solusi analitis tidak dapat menyelesaiakannya. Inti dari FEM adalah membagi suatu benda yang akan dianalisa, menjadi beberapa bagian dengan jumlah hingga (*finite*). Bagian-bagian ini disebut elemen yang tiap elemen satu dengan elemen lainnya dihubungkan dengan nodal (*node*). Kemudian dibangun persamaan matematika yang menjadi representasi benda tersebut (Fish, 2008). Proses pembagian benda menjadi beberapa bagian disebut *meshing*. Saat ini sudah banyak *software* yang digunakan dalam melakukan perhitungan metode elemen hingga. Dengan adanya *software* metode elemen hingga, diharapkan studi eksperimental yang dilakukan dapat dimodelkan dengan menggunakan *software*. Hal ini dikarenakan dengan menggunakan *software* metode elemen hingga, peneliti dapat menghemat biaya dan meminimalkan resiko faktor kesalahan manusia dalam studi eksperimental yang dilakukan.

Pada tahun 2019 Universitas Tanta di Mesir (Khalil et al., 2019) melakukan studi eksperimental untuk mengetahui perilaku pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan. Studi eksperimental dilakukan dengan 6 buah pelat kantilever beton bertulang dengan material yang sama persis tetapi memiliki ukuran dan letak bukaan yang berbeda. Bukaan pada studi eksperimental tersebut berbentuk segi empat untuk ke 6 buah pelat kantilever agar hasil studi eksperimental tiap kantilever dapat dibandingkan. Setiap pelat yang dites akan diberi beban garis merata di ujung bebas kantilever. Dari hasil eksperimen diperoleh beban maksimum yang dapat di

tahan pelat kantilever sebelum terjadi kegagalan, tingkat kekakuan dan lendutan dari tiap pelat kantilever yang di tes.



Gambar 1.2 Studi eksperimental pelat kantilever dengan bukaan

(Sumber Khalil et al., 2019)

Pada gambar 1.2 ditunjukkan pelat kantilever beton bertulang yang menjadi objek penelitian dalam studi eksperimental di Universitas Tanta, Mesir (Khalil et al., 2019). Berdasarkan studi eksperimental yang dilakukan oleh Universitas Tanta di Mesir tersebut, penulis ingin meneliti pengaruh bukaan dengan ukuran dan letak yang berbeda pada pelat kantilever dari studi eksperimental tersebut dengan batasan-batasan dan material serupa dengan menggunakan metode elemen hingga atau *finite element method*. Diharapkan hasilnya dapat memberikan gambaran yang mirip dengan hasil studi eksperimental tersebut.

1.2 Identifikasi Masalah

Dari beberapa uraian yang dikemukakan pada latar belakang, maka dapat diidentifikasi masalah-masalah sebagai berikut:

1. Pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan mengalami penurunan kekuatan dibanding tanpa bukaan.
2. Tegangan dan lendutan pada pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan hanya dapat dihitung melalui studi eksperimental di laboratorium atau dengan metode elemen hingga.
3. Letak dan ukuran bukaan pada pelat kantilever beton bertulang mempengaruhi kekuatan pelat kantilever beton bertulang.

1.3 Batasan Masalah

Pembatasan masalah digunakan untuk mencegah penyimpangan dan pelebaran pokok masalah agar penelitian yang dilakukan lebih terarah. Berikut adalah beberapa batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Analisis perilaku pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan dengan hanya menggunakan metode elemen hingga dengan bantuan *software* Midas FEA.
2. *Modelling* yang dilakukan mengikuti kriteria studi eksperimental yang dilakukan di Universitas Tanta, baik berupa material yang digunakan, perletakan sendi, letak dan ukuran bukaan, ukuran dan jumlah tulangan pada pelat kantilever beton bertulang.

1.4 Rumusan Masalah

Dari beberapa uraian yang penulis kemukakan pada bagian latar belakang tersebut, penulis dapat merumuskan permasalahannya sebagai berikut:

1. Bagaimana nilai tegangan dan lendutan pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan dengan metode elemen hingga jika dibandingkan dengan hasil studi eksperimental di Universitas Tanta?
2. Bagaimana pengaruh letak dan ukuran bukaan pada pelat kantilever beton bertulang jika dihitung dengan metode elemen hingga?

1.5 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka dapat diketahui tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui nilai tegangan dan lendutan pelat kantilever beton bertulang dengan bukaan dengan metode elemen hingga jika dibandingkan dengan studi eksperimental di Universitas Tanta.
2. Mengetahui pengaruh letak dan ukuran bukaan pada pelat kantilever beton bertulang jika dihitung dengan metode elemen hingga.

BAB 2

DASAR TEORI PELAT LENTUR

2.1 Teori Elastisitas

Teori elastisitas adalah salah satu cabang yang penting dalam ilmu fisika matematis yang mengkaji hubungan antara gaya, tegangan dan regangan pada benda elastis. Elastisitas merupakan sifat benda berupa perubahan bentuk atau deformasi yang terjadi hanya sementara atau tidak permanen. Ketika suatu benda pejal diberikan gaya luar, benda tersebut akan mengalami perubahan bentuk atau deformasi yang mengakibatkan timbulnya tegangan dan regangan dalam.

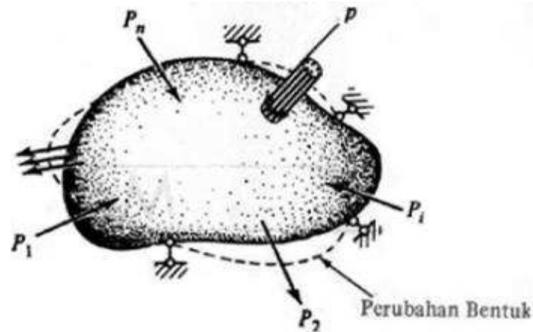
Deformasi atau perubahan bentuk ini bergantung pada konfigurasi geometris pada benda tersebut dan pada sifat mekanis dari material yang digunakan. Ketika membahas sifat elastis pada suatu benda, perlu diasumsikan bahwa benda tersebut memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Homogen yang artinya setiap bagian pada benda tersebut memiliki tingkat kerapatan yang sama.
- Isotropik yang artinya setiap titik pada benda yang ditinjau mempunyai karakteristik fisis yang sama ke segala arah.

Pembahasan teori elastisitas dibatasi hanya pada bahan yang bersifat elastis linier, yaitu suatu keadaan dimana hubungan antara tegangan dan regangan bersifat linier dan deformasi serta tegangan akan menghilang bila gaya luar dihilangkan. Selain itu, teori elastisitas juga menganggap material yang ditinjau bersifat homogen dan isotropis, dengan demikian sifat mekanis material sama dalam segala arah. Meskipun material-material struktural tidak secara tepat memenuhi semua anggapan yang telah dikemukakan di atas, tetapi pengujian menunjukkan bahwa teori elastisitas memberikan hasil dengan ketepatan yang tinggi, dengan syarat tegangan dari material yang ditinjau masih di bawah titik leleh (*yield point*).

Perumusan dan penyelesaian masalah pelat berdasarkan analisis matematis yang berasal dari teori pelat klasik merupakan penerapan khusus yang sangat penting dari teori elastisitas. Oleh karena itu, pengertian dan pemahaman menyeluruh tentang konsep dasar, notasi, definisi dan lainnya memiliki peran yang

penting. Tujuan dari bagian ini yaitu memperkenalkan dasar-dasar tersebut dalam bentuk yang ringkas.



Gambar 2.1 Respon suatu benda elastis terhadap gaya luar
(Sumber Szilard, 1989)

2.1.1 Tegangan Saat Benda Dalam Kondisi Elastis

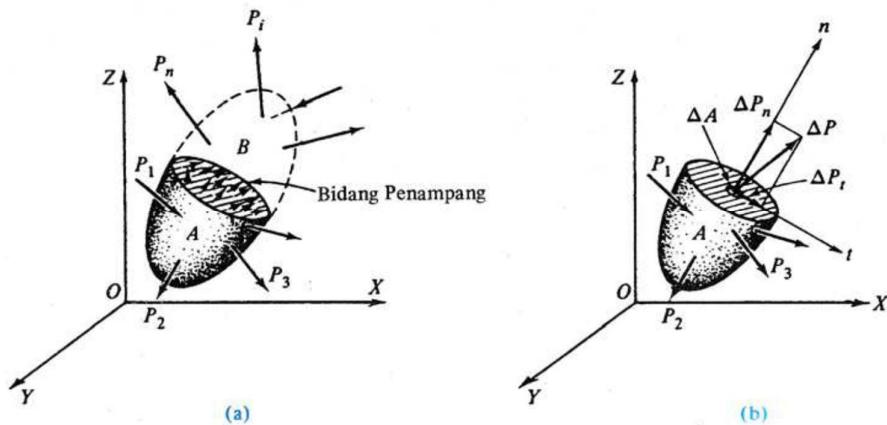
Dalam ilmu statika benda kaku (*rigid body*), dikaji gaya luar yang bekerja pada benda tanpa memperhitungkan perubahan bentuk yang dialami benda tersebut. Sebaliknya, dalam teori elastisitas meninjau perubahan bentuk yang diakibatkan gaya luar. Dikarenakan perubahan bentuk pada benda tersebut, gaya-gaya luar diubah menjadi gaya-gaya dalam.

Berikut dijelaskan peninjauan suatu benda elastis yang memiliki bentuk sembarang dalam sistem koordinat *cartesius* X, Y, Z, yang menahan gaya luar pada kondisi seimbang. Dalam menentukan gaya dalam yang muncul pada partikel-partikel benda tersebut, dapat dibayangkan benda tersebut dibagi menjadi dua bagian oleh suatu bidang seperti yang ditampilkan pada gambar 2.2a. Apabila sekarang dibayangkan bahwa bagian atas dihilangkan, keseimbangan dari benda tersebut harus ditahan oleh gaya-gaya luar yang ada pada permukaan penampang dari benda tersebut. Sekarang, apabila diambil suatu luas sebesar ΔA dari penampang benda tersebut dan dinyatakan gaya dalam yang bekerja pada luas tersebut sebagai P (gambar 2.2b), perbandingan $P/\Delta A$ adalah tegangan rata-rata yang dapat didefinisikan sebagai limit pada perbandingan seperti dibawah ini:

$$\text{Tegangan } P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \text{ (gaya persatuan luas)} \dots \dots \dots \quad (2.1)$$

Lebih mudah menggunakan komponen normal (tegak lurus) dan tangensialnya (bidang), dikarenakan ΔP pada umumnya tidak tegak lurus terhadap penampang. Karena itu, definisi tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ) adalah sebagai berikut:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \text{ dan } \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \dots \dots \dots \quad (2.2)$$



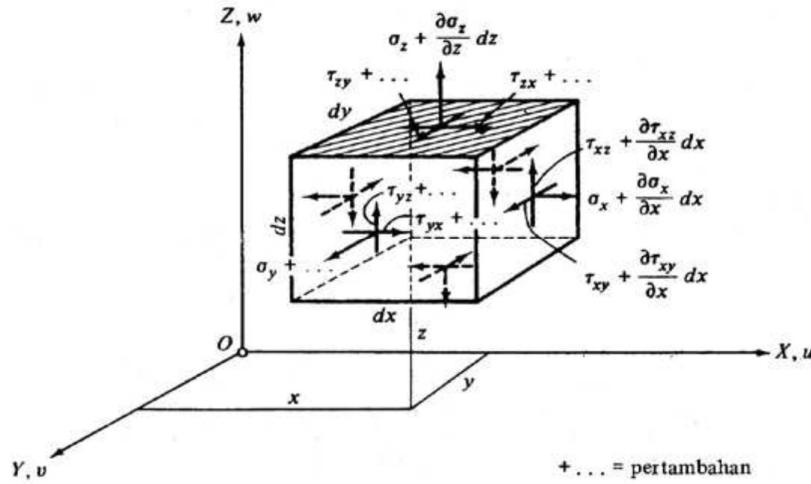
Gambar 2.2 Metode Irisan

(Sumber Szilard, 1989)

Harus diingat bahwa tegangan yang terdapat dalam suatu bidang merupakan vektor tegangan. Resultan tegangan dapat dicari dengan mudah dengan menjumlahkan vektor-vektor dari komponen-komponennya. Pada benda elastis, keadaan tegangan dapat bervarias dari satu titik ke titik yang lainnya. Karena itu dapat dituliskan $\sigma(x, y, z)$ dan $\tau(x, y, z)$.

Dalam menggambar keadaan dalam tiga dimensi, diambil suatu elemen kecil berbentuk kotak (dx, dy, dz) yang memiliki permukaan sejajar dengan bidang koordinat. Komponen tegangan normal X, Y dan Z masing-masing memiliki notasi σ_X, σ_Y dan σ_Z . Huruf X, Y dan Z melambangkan garis normal yang bersifat tegak lurus pada permukaan tempat vektor tegangan yang bekerja. Tegangan geser (τ) juga memiliki simbol yang hampir sama dengan notasi pada tegangan normal dimana perbedaannya hanya pada simbol tegangan normal (σ) diganti menjadi simbol

tegangan geser (τ). Dikarenakan tegangan juga merupakan suatu fungsi berdasarkan letaknya pada suatu benda, maka intensitasnya dapat berubah apabila bidang rujuknya dipindahkan sejauh dx , dy dan dz . Nilai pertambahan yang muncul dinyatakan melalui dua suku pertama dari deret Taylor (Gambar 2.3).



Gambar 2.3 Elemen tiga dimensi

(Sumber Szilard, 1989)

Dalam bidang dekat pada suatu elemen, ujung-ujung sumbu koordinat dianggap sebagai sumbu positif. Dalam bidang jauh pada suatu elemen, segala tegangan yang bekerja di arah sumbu koordinat negatif dianggap bernilai positif. Perjanjian tanda tersebut mengikuti peraturan umum yang sering dipakai dalam ilmu teknik yaknik, tarikan bernilai positif dan tekanan bernilai negatif.

Kondisi tegangan pada bidang tiga dimensi di sembarang titik pada benda elastis ditentukan oleh 9 komponen tensor tegangan yang dirumuskan dalam matriks yang simetris terhadap diagonal utama sebagai berikut:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2.3)$$

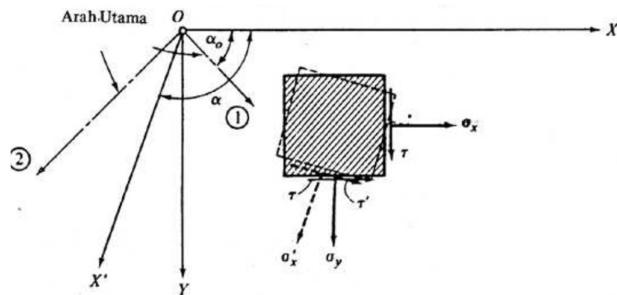
Tensor merupakan besaran dengan arti fisik yang memenuhi kriteria dari hukum transformasi tertentu. Hukum transformasi disebut sebagai rotasi sumbu

dalam teori elastis. Tensor orde dua dinyatakan dalam bentuk matriks diatas dikarenakan memiliki sifat simetris sebagai berikut:

Dalam sumber-sumber studi literatur, persamaan (2.1) disebut dengan hukum timbal-balik tegangan geser yang dapat dibuktikan dengan mengambil momen dari tegangan-tegangan yang ada terhadap sumbu koordinat. Meskipun kondisi tegangan pada pelat yang tebal memiliki sifat tiga dimensi, pelat yang tipis memiliki kondisi tegangan tiga dimensi yang tidak sempurna seperti pelat yang tebal, dimana semua komponen tegangan pada permukaan pelat yang tipis yang sejajar dengan bidang XY sama dengan nol.

Kondisi tegangan dua dimensi memiliki fungsi yang penting dalam analisis pelat elastis. Pada kondisi tersebut $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Dikarenakan hal tersebut, matriks tensor tegangan yang ditinjau berubah dimana $\tau = \tau_{yz} = \tau_{xy}$, dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_z \end{bmatrix}. \dots \quad (2.5)$$



Gambar 2.4 Rotasi elemen dua dimensi

(Sumber Szilard, 1989)

Apabila komponen tegangan σ_x , σ_y dan $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ dalam suatu elemen dua dimensi seperti pada gambar 2.4 berada dalam sistem koordinat kartesius

diketahui, maka kedua arah yang saling tegak lurus (garis 1 dan garis 2) bidang-bidang dimana tegangan geser sama dengan nol dan tegangan normal mempunyai nilai yang ekstrim dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}; \text{ jadi } \alpha_0 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots \dots \dots \quad (2.6)$$

Arah-arah tersebut disebut arah utama (*principal direction*). Tegangan normal yang bekerja pada bidang ini baik maksimum ataupun minimum disebut sebagai tegangan utama (σ_1, σ_2) yang dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots \dots \dots \quad (2.7)$$

Sama dengan tegangan normal, nilai tegangan geser maksimum dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut:

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots \dots \dots \quad (2.8)$$

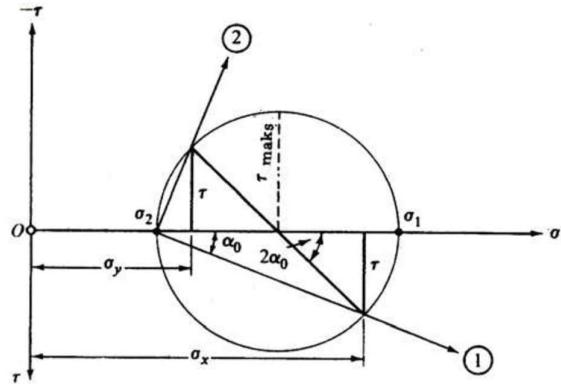
Variasi dari komponen tegangan geser dan tegangan normal apabila sudut α berubah-ubah dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \dots \dots \dots \quad (2.9)$$

$$\tau' = \tau \cos 2\alpha \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \dots \dots \dots \quad (2.10)$$

Persamaan untuk mencari nilai tegangan utama dan persamaan transformasi tegangan dua dimensi dapat diturunkan yang kemudian dinyatakan secara grafis dalam lingkaran *mohr* (gambar 2.5).

Dikarenakan momen dalam yang bekerja di elemen pelat adalah vektor momen yang didapat dari komponen tegangan utama dan tegangan geser (σ_x , σ_y dan τ), momen yang bekerja dalam bidang miring yang memiliki garis normal n (gambar 2.6), dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan rumus sebagai berikut:

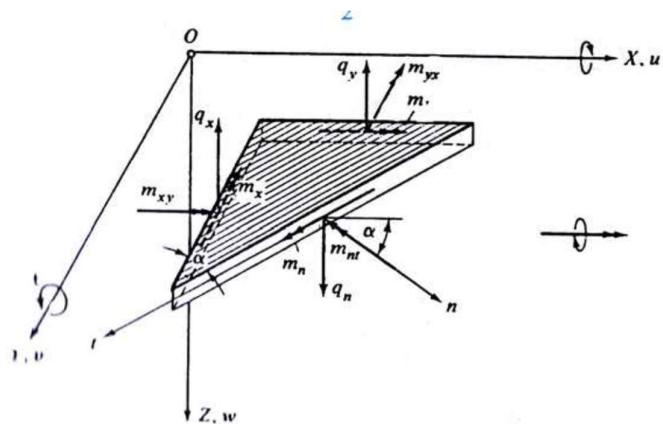


Gambar 2.5 Lingkaran Mohr untuk tegangan

(Sumber Szilard, 1989)

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{yx} \sin 2\alpha \dots \quad (2.11)$$

$$m_{nt} = m_{xy} \cos 2\alpha - \frac{m_x - m_y}{2} \sin 2\alpha \dots \dots \dots \quad (2.12)$$



Gambar 2.6 Komponen momen di bidang miring elemen pelat

(Sumber Szilard, 1974)

Momen-momen utama yang berfungsi dalam menyatakan nilai ekstrim dapat diperoleh dari lingkaran mohr dengan rumus sebagai berikut:

$$(m_{nt})_{\min}^{\max} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \dots \dots \dots \quad (2.13)$$

Sudut α_0 yang berhubungan dengan letak momen lentur baik maksimum ataupun minimum dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\tan 2\alpha = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \dots \dots \dots \quad (2.14)$$

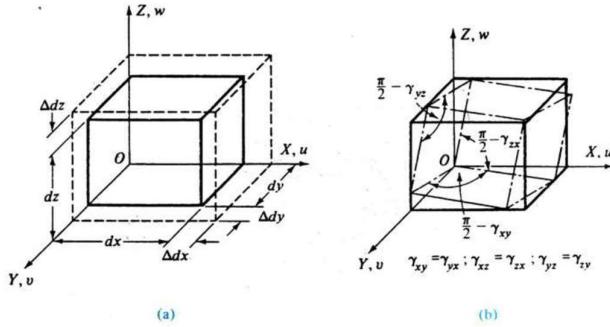
2.1.2 Regangan dan Perpindahan

Benda elastis yang terdapat pada gambar 2.1 ditahan oleh perletakannya sedemikian rupa yang mengakibatkan perpindahan berupa translasi dan rotasi pada benda tegar/*rigid body* tidak terjadi. Dikarenakan benda elastis mengalami deformasi atau perubahan bentuk yang diakibatkan gaya luar, setiap titiknya mengalami perpindahan yang relatif kecil. Komponen perpindahan translasional dinyatakan dalam arah X, Y, Z sebagai u, v, w dan dituliskan dalam fungsi untuk menunjukkan bahwa komponen perpindahan juga adalah fungsi lokasinya. Berikut adalah fungsi yang dimaksud:

$$u = f_1(x, y, z), \ v = f_2(x, y, z) \ \text{ dan } w = f_3(x, y, z) \dots \dots \dots \quad (2.15)$$

Dalam menghubungkan perpindahan dan deformasi atau perubahan bentuk dapat ditinjau kembali kotak yang sangat kecil dengan sisi dx , dy dan dz pada benda elastis seperti pada gambar 2.3. Dikarenakan keseluruhan benda elastis memiliki deformasi masing-masing, elemen yang kecil juga akan mengalami deformasi pada panjang sisi dan sudut-sudut yang pada awalnya siku-siku juga akan mengalami perubahan seperti pada gambar 2.7. Dengan membuat batasan pada perubahan bentuk yang kecil, dapat didefinisikan regangan normal ε sebagai perubahan

panjang satuan. Sebagai contoh, regangan normal dalam arah X dirumuskan sebagai berikut:



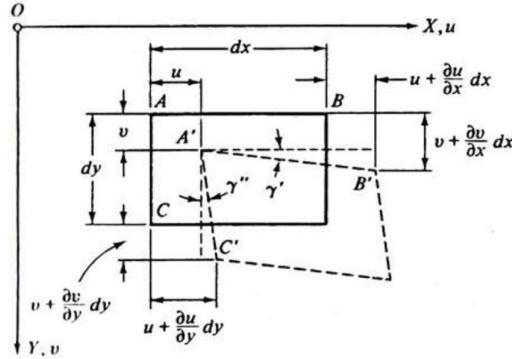
Gambar 2.7 Deformasi suatu elemen

(Sumber Szilard, 1974)

Pertambahan Δdx dapat dinyatakan sebagai suku kedua dalam deret Taylor ($\Delta dx = (\partial_u / \partial_x)dx$), sehingga regangan pada arah X, Y, Z dapat dituliskan dengan rumus sebagai berikut:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{dan} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots \quad (2.17)$$

Dikarenakan adanya tegangan geser, permukaan dari elemen yang ditinjau akan mengalami rotasi (gambar 2.7b). Untuk contoh, dapat diambil proyeksi dari elemen tersebut pada bidang XY seperti pada gambar 2.8 yang dapat didefinisikan regangan geser sebagai distorsi sudut:



Gambar 2.8 Distorsi yang diproyeksikan

(Sumber Szilard, 1974)

Dengan proses yang sama dapat diperoleh:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx} \text{ dan } \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \dots \quad (2.19)$$

Sama seperti dengan tensor tegangan pada suatu titik. Regangan tensor juga dapat didefinisikan dengan persamaan matriks sebagai berikut:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \dots \quad (2.20)$$

2.1.3 Hukum Hooke Umum

Pada bahan struktur dengan batas elastis linear yang jelas, hukum hooke pada suatu dimensi menghubungkan tegangan dan regangan normal dengan persamaan sebagai berikut:

$$\sigma = E\varepsilon \dots \quad (2.21)$$